الوسيــــــــــط

في الرياضيات

الصف الثالث الاعدادي
الفصل الدراسي الاول



اعداد
علاءالدين محمود
معلم اول الرياضيات
T: 01110031899

القناة علي اليوتيوب
Aladdin Academy

بسم الله الرحمن الرحيم

و به نهتدي و نستعين

و صلاة و سلام علي المبعوث رحمة للعالمين سيدنا و حبيبنا و قدوتنا و معلمنا محمد عليه و علي آله و صحبه افضل صلاة و أحسن تسليم ..

و بعد ..

بداية أتوجه بالشكر لكل اساتذتي الاجلاء الذين سبقوني بالابداع في اخراج اعمال هامة يستفيد بها كل الطلبة و الدارسين في كل انحاء العالم العربي ، و ظلت تلك الاعمال كصدقة جارية لهم بعد رحيلهم عن عالمنا .. و اخص بالذكر استاذي الفاضل / احمد الشنتوري .. رحمه الله و اسكنه فسيح جناته .. و نحن علي الدرب يا استاذي سائرون

و أتتقدم اليكم اخوتي و اخواتي المعلمين و ابنائي و بناتي الطلاب بهذه الهدية البسيطة و التي حاولت ان اجمع فيها كل المعلومات التي تخص مادتنا الحبيبة الرياضيات بصورة مبسطة و شيقة و مرتبة .. لتكون معينا لكل دارس ، و نبعا لكل محب للرياضيات لينهل منها قدر ما شاء ..

فإن وجدتم بها ما أقول فهو فضل من الله أولا و آخرا و توفيق منه وحده عز وجل .. و ان وجدتم تقصير او سهو فهو مني و من الشيطان ...

نسأل الله الإخلاص في النية ، و الاتقان في العمل ، و ان يحتسبه من العلم الذي ينتفع به ... يوم لا ينفع مال و لا بنون الا من اتي الله بقلب سليم ..

علاءالدين محمود عوض

معلم اول الرياضيات – إدارة نصر النوبة – محافظة اسوان

الوحدة الاولي

العلاقات و الدوال

الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتي

أولا : الزوج المرتب :

يقال ان (أ ، ب) زوجا مرتبا حيث : أ يسمي المسقط الأول (الاحداثي السيني)

ب يسمي المسقط الثاني (الاحداثي الصادي)

اليكم تذكير بخواص الأزواج المرتبة :

(١)الزوج (٣ ، -٥) ≠ (-٥ ، ٣)   خاصية الابدال غير موجودة

(٢)اذا كان : (أ ، ب) = (٤ ، -١) فإن : أ = ٤ ، ب = - ١

أي ان : المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

امثلة محلولة :

في كل مما يأتي اوجد قيمتي س ، ص :

(١) (س – ١ ، ٧) = (٥ ، ٢ص + ٣)

الحل : س – ١ = ٥   و منها   س = ٥ + ١   اذن : س = ٦

٢ص + ٣ = ٧   و منها   ٢ص = ٧ – ٣ ⬅ ٢ص = ٤ بقسمة الطرفين ÷ ٢

اذن : ص = ٢

---

(٢)(٥س – ٤ ، ٤) = (٦ ، ص + ١)   حاول بنفسك

---

(٣)(٣١ ، س + ص) = (٨س – ١ ، ٦)

الحل : ٨س – ١ = ٣١   ٨س = ٣١ + ١ ⬅ ٨س = ٣٢ بقسمة الطرفين ÷ ٨

اذن : س = ٤   و بالمثل : س + ص = ٦ ⬅ ٤ + ص = ٦

ص = ٦ – ٤   اذن : ص = ٢

---

(٤) (س^٣ – ١ ، ص^٢ – ٥) = (٧ ، ٤)   **حاول بنفسك لكن تذكر الجذر التربيعي = ±**

---

(٥) (٣/س ، ص^-٥) = (١/٢ ، ٣٢)   **<< سؤال قوي >>**

الحل : ٣/س = ١/٢   **حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين** ⬅ س = ٦

ص^-٥ = ٢^٥ ⬅ (١/ص)^٥ = ٢^٥ ⬅ ١/ص = ٢ ⬅ **اذن :** ص = ١/٢

---

(٦) (√(س – ٣) ، ٤) = (٣ ، ص/٥)   **حاول بنفســـــــــك**

تمرين منزلي :

اوجد قيمة س ، ص في كل مما يأتي :

(١) (٥س – ٧ ، ٦) = (٨ ، ٣ – ص)   (٢) (س + ١ ، ١٢) = (٤ ، س + ص)

(٣) (س^٢ – ١٢ ، – ٧) = (١٣ ، س + ٢ص)

ثانيا : حاصل الضرب الديكارتي :

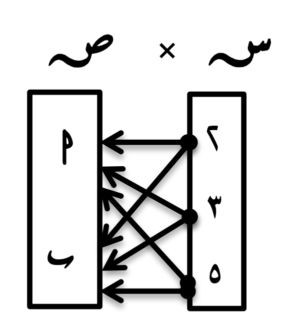
سمي نسبة الي العالم (رينيه ديكارت) مؤسس علم الهندسة التحليلية ، و يطلق عليه أيضا اسم (ضرب المجموعات) و في بعض الأقطار العربية (جداء المجموعات) .

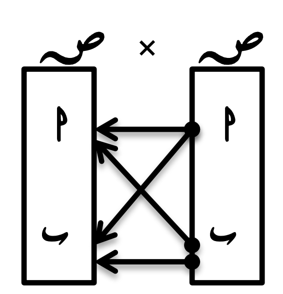
تعريف : س × ص = { (س ، ص) : س ∈ س ، ص ∈ ص }

امثلة محلولة :

(١) **اذا كانت :** س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { أ ، ب } **مثل سهميا كلا من :**

س × ص ، ص × ص   **الحــــل :**

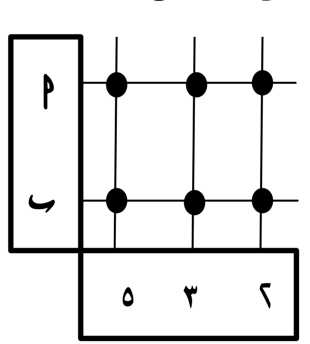


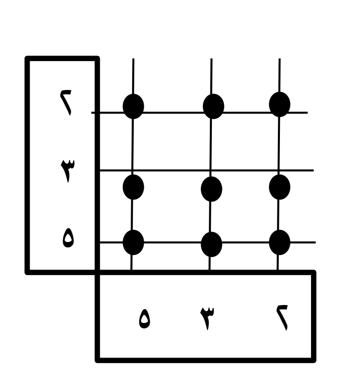


(٢) اذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = { ٻ ، ٮ } مثل بيانيا كلا من :

س × ص ، س^٢ **الحل :**







لاحظ ان :

(١) س × ص ≠ ص × س (٢) ص × ص تكتب أيضا ص^٢

(٣) ن (س) = ٣ ، ن (ص) = ٢ ، ن (س × ص) = ٣ × ٢ = ٦

ن(ص^٢) = ٢^٢ = ٤ حيث ن : عدد عناصر المجموعة

كتابة بيان حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين :

يكتب علي صورة مجموعة من ازواج مرتبة

امثلة :

(١) اذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = { ٻ ، ٮ } اكتب كلا من : س × ص ، ص^٢

الحل :

س × ص = { (٢ ، ٻ) ، (٢ ، ٮ) ، (٣ ، ٻ) ، (٣ ، ٮ) ، (٥ ، ٻ) ، (٥ ، ٮ) }

صـ^2 = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ب) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ب) }

---

(٢) اذا كانت : سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، صـ = { -١ ، صفر } اكتب كلا من :

صـ × سـ ، سـ^2 حاول بنفســــــــــــك

---

(٣) اكمل ما يأتي :

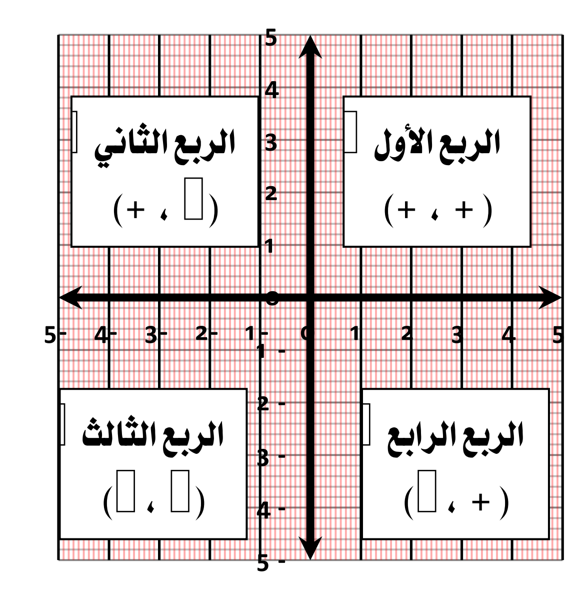
-اذا كان : ن(سـ) = ٢ ، ن(سـ × صـ) = ٨ فإن : ن(صـ) = ...

-اذا كان : ن(سـ)=٣ ، صـ = {٥} فإن : ن(سـ × صـ) = ...

-اذا كان : ن(سـ^2) = ٤ ، ن(صـ) = ٣ + ن(سـ) فإن : ن(صـ^2) = ...

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الغير منتهية : ح × ح

عند تمثيلها بيانيا تنشأ لدينا الشبكة البيانية التربيعية ح^2



حدد موضع كل نقطة مما يأتي :

(١) (٥ ، -٣) ....

(٢) (-١ ، ٢) ....

(٣) (٩ ، ٦) ....

(٤) (٠ ، ٥) ....

(٥) (-٣ ، ٠) ....

(٦) اذا كانت (٣ ، ك + ٧) تقع علي

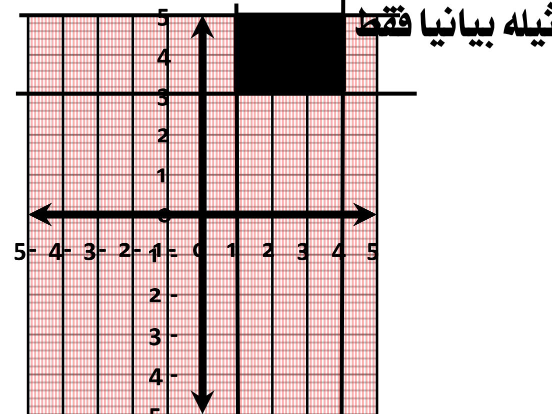
محور السينات فإن : ك = ...

معلومة اثرائية : حاصل الضرب الديكارتي للفترات يتم تمثيله بيانيا فقط

مثال : اذا كانت : سـ = [١ ، ٤] ، صـ = [٣ ، ٥]

مثل بيانيا سـ × صـ

الجزء المظلل علي الرسم



واجب منزلي :

(١) اذا كانت : س = { ٢ ، ٥ } ، ص = { ٧ ، صفر } اوجد :

أولا : ص × س و مثله بيانيا ثانيا : س ٢ و مثله سهميا

(٢) اذا كانت : س = { ٢ ، ١ } ، ص = { ٧ ، ٣ } ، ع = { ٣ }

اوجد : ع × س ، ن(ص٢) ، (ص ∩ ع) × س

الدرس الثاني
العلاقة – الدالة (التطبيق)

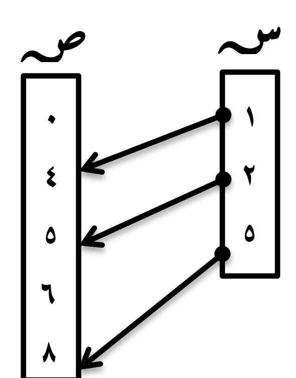
العلاقة بين مجموعة و اخري هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين .

امثلة محلولة :

(١) اذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٥ } ، ص = { ٠ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س الي ص حيث

أ ع ب تعني (ب = أ + ٣) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان العلاقة ثم مثلها سهميا .



الحل : بيان ع = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٨) }

(٢) اذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{5}$ } وكانت ع علاقة من س الي ص حيث

أ ع ب تعني (أ معكوس ضربي للعدد ب) لكل أ ∈ س ،

ب ∈ ص اكتب بيان العلاقة ثم مثلها بيانيا.

حاول بنفسك

(٣) اذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ } وكانت ع علاقة علي س حيث أ ع ب تعني (أ = $\sqrt{ب}$)

لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان العلاقة ثم مثلها سهميا

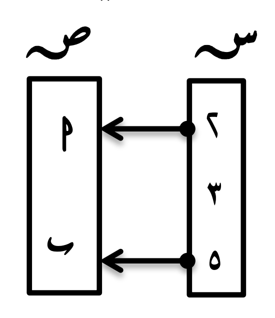
الحل : بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ١٦) } مثلها سهميا

الدالة (التطبيق)
متي تكون العلاقة دالة ؟؟

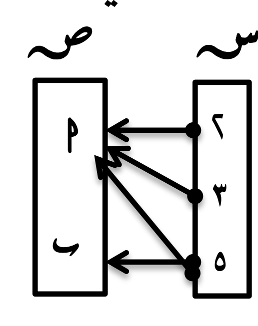
اذا كان كل عنصر من عناصر س (يدل) علي عنصر واحد فقط من عناصر ص

و تسمي عناصر س (بمجال الدالة) ، و عناصر ص (المجال المقابل) ، بينما المسقط الثاني في ازواج بيان العلاقة يسمي (المـــــدى)

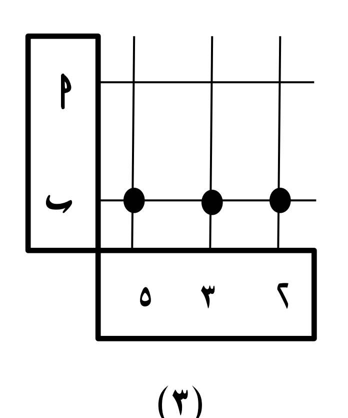
امثلة محلولة : (١)أي من العلاقات الاتية تمثل دالة من س الي ص



(١)



(٢)



(٣)

الحلـ : (١) ✗ ليست دالة لان الـ ٣ لم تظهر كمسقط اول

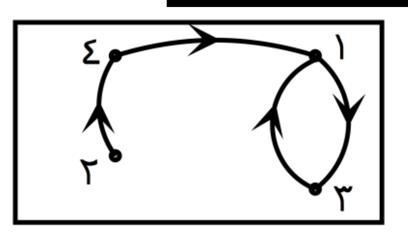
(٢) ✗ ليست دالة لان الـ ٥ ظهرت كمسقط اول مرتين

(٣) ✓ دالة لان كل عنصر من س ظهر كمسقط اول مرة واحدة المدى = { ب }

مثال (٢) : اكتب بيان العلاقة ،

و هل العلاقة تمثل دالة ام لا مع ذكر السبب ،

و اذا كانت دالة اوجد المدى : حاول بنفســـــــــك



مثال (٣) : اذا كانت : س = { -١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س الي ص حيث ا ع ب تعني (ب = ٢ا + ٤) لكل ا ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان العلاقة ثم مثلها سهميا و اذكر اذا كانت دالة ام لا

الحلــــــ : بيان ع = { (-١ ، ٢) ، .... اكمل الحل

مثال (٤) : اذا كانت : سـ = { ٠، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٩ } وكانت ع علاقة علي سـ

حيث ٲ ع ب تعني (ب = $\sqrt{ٲ}$) لكل ٲ ∈ سـ ، ب ∈ سـ

اكتب بيان العلاقة و مثلها بيانيا .. هل العلاقة دالة ام لا مع ذكر السبب ؟

الحـل : بيان ع = { (٩ ، ٣) ، .... اكمل الحل

واجب منزلي :

(١) اذا كانت : سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ص : ص ∈ ط ، ٢ ⩽ ص < ٩ } حيث (ط) هي الاعداد الطبيعية ، وكانت ع علاقة من سـ الي صـ حيث ٲ ع ب تعني (ٲ = $\frac{1}{2}$ب) لكل ٲ ∈ سـ ، ب ∈ صـ اكتب بيان العلاقة ثم مثلها سهميا . و اذا كانت ع دالة اكتب المدى ؟؟

(٢) اذا كانت : سـ = { -١ ، ١ ، ٢ } ، صـ = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ }

وكانت د : سـ ← صـ حيث د(سـ) = ٣ - سـ اكتب بيان الدالة ثم اوجد المـدى ؟

⊛متفوقيـن :

اذا كانت : سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، و الدالة د معرفة علي سـ حيث :

بيان الدالة د = { (ٲ ، ٢) ، (ب ، ٥) ، (٥ ، ٥) } فأوجد قيمة : $(ٲ - ب)^2$

الدرس الثالث
دوال كثيرات الحدود

تعريف : الدالة كثيرة الحدود تكون علي الصورة :

د(سـ) = $ٲ_0 + ٲ_1 سـ + ٲ_2 سـ^2 + ٲ_3 سـ^3 + ... + ٲ_ن سـ^ن$

حيث : $ٲ_0 ، ٲ_1 ، ٲ_2 ، ٲ_3 ، .... ٲ_ن$ اعداد حقيقية ، $ٲ_ن \neq$ صفر

درجة الدالة : هي قيمة اكبر قوة (أس) للمتغير (سـ) في قاعدة الدالة

امثلة محلولة :

(١)اذا كان : د(سـ) = $سـ^2$ – ٢ سـ + ١ اذكر درجة الدالة ثم اوجد : د(٠) ، د(-١)

الحل : الدالة من الدرجة الثانية

د(٠) = ٠ – ٢×٠ + ١ = ١ ، د(–١) = (–١)^{٢} – ٢ × –١ + ١ = ٤

---

(٢) اذا كان : د(س) = س (س^{٢} – ١) اذكر درجة الدالة ، ثم اوجد اصفار الدالة

الحل : الدالة من الدرجة الثالثة

المقصود باصفار الدالة هي قيم س التي تجعل الدالة د(س) = صفر

س (س^{٢} – ١) = ٠ منها : س = ٠

او : س^{٢} – ١ = ٠ منها : (س – ١)(س + ١) = ٠ اذن : س = ١ او س = – ١

اصفار الدالة = {٠ ، ١ ، – ١}

تدريب (١) :

(١) اوجد درجة الدالة : د(س) = (س^{٣} – ١)^{٢}

(٢) اوجد درجة الدالة : د(س) = ٣ – ٢س **ثم اوجد :** د(–١)

و اذا كانت : د(ك) = ٥ **اوجد قيمة : ك**

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولا : الدالـــــة الصفرية (الدالة الثابتة)

الصورة العامة : د(س) = جـ **حيث : جـ ثابت (الجزء المقطوع من محور الصادات)**

تمثل بيانيا بمستقيم يوازي محور السينات

امثلة لدوال ثابتة (صفرية) :

(١) د(س) = ٥ (٢) د(س) = – ٧ (٣) د(س) = ٣ك – ٢

تدريب (٢) : اكمل ما يأتي :

(١) اذا كانت د(س) = ٣ فإن : د(٥) + د(– ٥) = ...

(٢) د(س) = – ٤ تقطع محور الصادات عند النقطة (........ ، ....)

واجب منزلي :

(١) اذا كانت : د(س) = ٢س^{٢} — ٥س + ٢ اثبت ان : د(٢) = د($\frac{١}{٢}$)

(٢) مثل بيانيا الدالة : د(س) = — ٢

ثانيا : الدالـــــــة من الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

الصورة العامة : د(س) = ب س + جـ حيث (ب ، جـ) ثوابت

تمثل بيانيا بخط مستقيم ميله = ب ، و يقطع من محور الصادات جزءا طوله = جـ

امثلة محلولة :

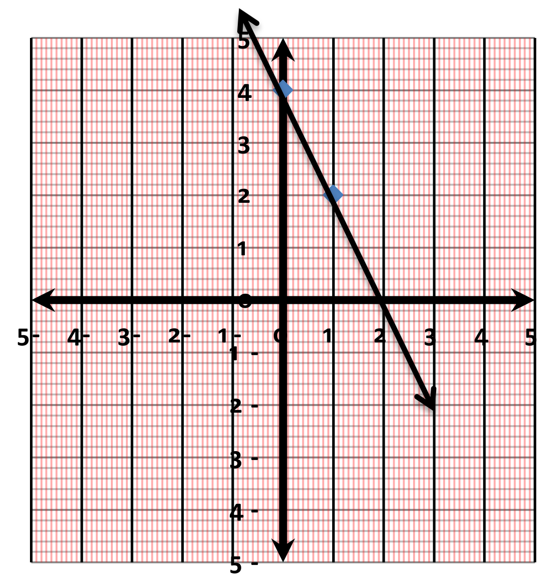
(١) مثل بيانيا الدالة : د(س) = ٤ — ٢س

و من الرسم اوجد نقط التقاطع مع محوري الاحداثيات

الحلــــ : نفرض أي قيم للمتغير (س)

د(٠) = ٤ — ٢×٠ = ٤ ، د(١) = ٤ — ٢×١ = ٢

س	٠	١
ص = د(س)	٤	٢



نقوم بتمثيل الجدول في ورقة رسم بياني :

التقاطع مع محور السينات (٢ ، ٠) ، التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٤)

يمكن إيجاد نقط التقاطع بطريقة أخرى :

نضع : س = ٠

اذن : ص = ٤ — ٢ × ٠ = ٤

التقاطع مع محور الصادات (٠ ، ٤)

نضع : ص = د(س) = ٠

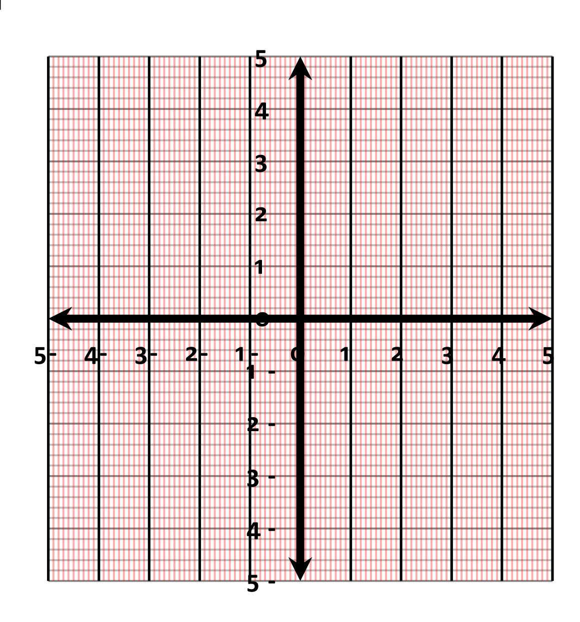
اذن : ٤ — ٢س = ٠ منها : س = ٢

التقاطع مع محور السينات (٢ ، ٠)

تدريب : مثل بيانيا الدالة : د(س) = س — ٣ ، و من الرسم اوجد نقط التقاطع مع محوري الاحداثيات

الحل :

س		
ص = د(س)		



مثال (٢) : اذا كان المستقيم الممثل للدالة : د(س) = ٦س – جـ يقطع محور الصادات عند (هـ ، ٣) اوجد قيمتي : جـ ، هـ

الحـــل : النقطة (هـ ، ٣) تقع علي محور الصادات : س = هـ = صفر ، ص = د(س) = ٣

٦ × ٠ – جـ = ٣ – جـ = ٣ اذن : جـ = – ٣

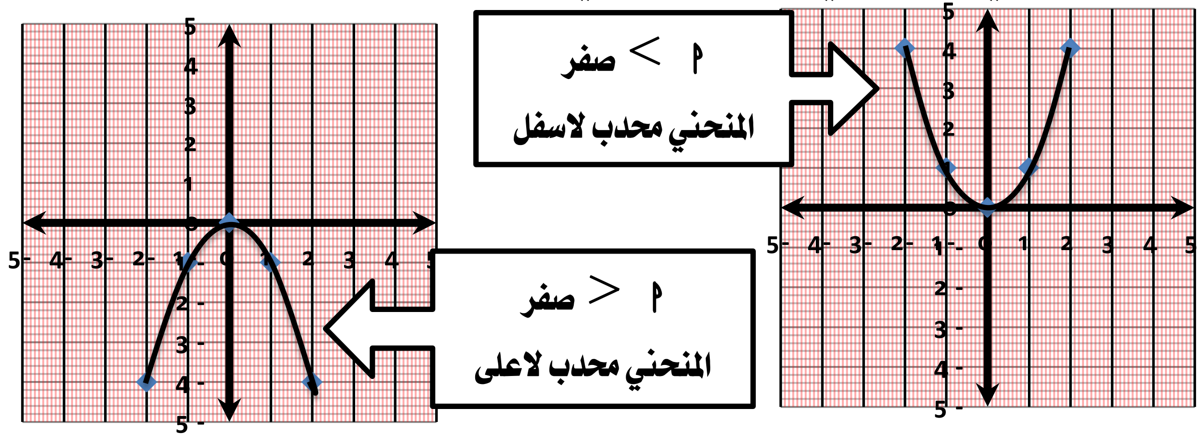
تدريب : اذا كانت النقطة (ك ، ٣ ك) تقع علي المستقيم الممثل للدالة : د(س) = ٨ – س

اوجــــد قيمة ك ؟

ثالثا : دالــــة الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)

الصورة العامة : د(س) = ٲ $س^٢$ + ب س + جـ حيث : ٲ ، ب،جـ ثوابت

تمثل بيانيا بمنحني (قطع مكافيء) اما محدب لاعلي او محدب لاسفل



مثال (١) : مثل بيانيا الدالة : د(س) = س^{٢} – ٤ في [– ٣ ، ٣] و من الرسم اوجـــد :

١) احداثي رأس المنحني　　　٢) معادلة محور التماثل　　　٣) القيمة العظمى او الصغرى للدالة

٤) اصفار الدالـــة　　　الحل : أولا نكون الجدول الاتى :

س	س^{٢} – ٤	ص	(س ، ص)
–٣	(–٣)^{٢} – ٤	٥	(–٣ ، ٥)
–٢	(–٢)^{٢} – ٤	٠	(–٢ ، ٠)
–١	(–١)^{٢} – ٤	–٣	(–١ ، –٣)
٠	(٠)^{٢} – ٤	–٤	(٠ ، –٤)
١	(١)^{٢} – ٤	–٣	(١ ، –٣)
٢	(٢)^{٢} – ٤	٠	(٢ ، ٠)
٣	(٣)^{٢} – ٤	٥	(٣ ، ٥)

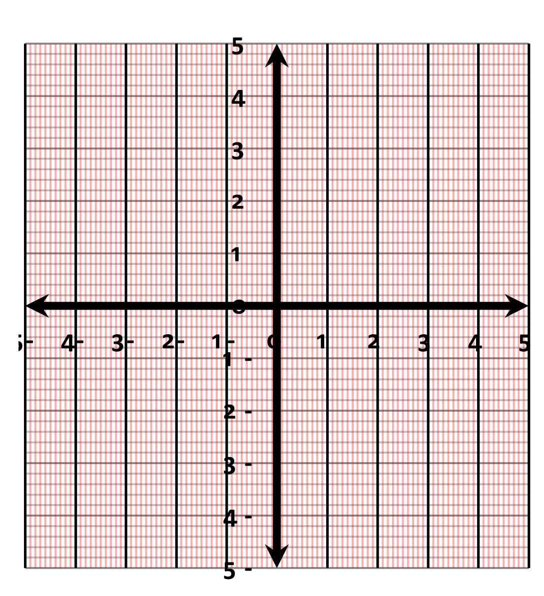
نقطة رأس المنحني (٠ ، –٤)　، س = ٠ معادلة محور التماثل ، ص = –٤ القيمة الصغرى للدالة

اصفار الدالة : هي تقاطع المنحني مع محور السينات = { –٢ ، ٢ }

تدريب : مثل بيانيا الدالة : د(س) = ٣ + ٤س – ٢س^{٢} حيث [–١ ، ٣] و من الرسم اوجـــد :

نقطة رأس المنحني ، معادلة محور التماثل ، القيمة العظمى للدالة

س	٣ + ٤س – ٢س^{٢}	ص	(س ، ص)



اختبارات علي الوحدة الأولى

((الاختبار الأول))

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة :

(١) اذا كانت : سـ = {٥} ، صـ = {٣} فإن : ن (سـ×صـ) = ... [١ ، ١٥ ، ٨ ، {(٣،٥)}]

(٢) د(س)=س^{٢} – (س + ٣)^{٢} كثيرة حدود من الدرجة ..... [الأولى ، الثانية ، الرابعة ، الصفرية]

(٣) مجموع الجذرين التربيعيين للعدد ٢٥ يساوي ..... [٥ ، – ٥ ، ± ٥ ، صفر]

(٤) (٢ + $\sqrt{٣}$) (٢ – $\sqrt{٣}$) = ... [٧ ، –٥ ، ١ ، ٤]

(٥) اذا كان : (ك + ٥ ، ل) = (٨ ، ٣) فإن : ك – ل = ... [٠ ، ٦ ، ٨ ، ٣]

(٦) اذا كان : د(س) = ٥ فإن : د(١) + د(–١) = ... [١٠ ، ٥ ، ٠ ، ٢]

السؤال الثاني :

(١) اذا كانت : سـ = { ١، ٣ ، ٤ } ، صـ= {١ ، ٢، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من سـ الي صـ حيث أ ع ب تعني (أ + ب = ٥) لكل أ ∋ سـ ، ب ∋ صـ اكتب بيان العلاقة ثم مثلها سهميا و اذا كانت دالة اكتب المدى ؟؟

(٢) اذا كان : سـ × صـ = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) } اوجد : (صـ - سـ) × سـ ؟

السؤال الثالث :

(١) اذا كان : (س^{٥} ، ٧) = (٣٢ ، ٤ص – ١) اوجـــــد قيمتي : س ، ص ؟

(٢) مثل بيانيا الدالة : د(س) = ١ – ٢س ثم اوجد نقط التقاطع مع محورى الاحداثيات ؟

السؤال الرابع :

(١) اذا كان المستقيم الممثل للدالة : د(س) = ٦ – ك س يقطع محور السينات عند النقطة (٣ ، هـ) اوجـــــد قيمة ك ، هـ ؟

(٢) ارسم منحني الدالة : د(س) = س^{٢} – ١ في [– ٣ ، ٣] و من الرسم اوجد معادلة محور التماثل

السؤال الخامس :

(١) اذا كانت : سـ = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢} وكانت ع علاقة على سـ حيث ﻡ ع ب تعني (ﻡ معكوس جمعي للعدد ب) لكل ﻡ ∋ سـ ، ب ∋ سـ اكتب بيان العلاقة ثم مثلها بيانيا و اذا كانت العلاقة دالة اكتب المدى ؟

(٢) اذا كانت : د(س) = ١ – ٢ س ، ر(س) = – ٣ اوجد القيمة العددية للمقدار : ر (٥) – د(١) ؟

الاختبار الثاني

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة :

(١) اذا كان سـ×صـ = {(٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)} فإن : ن (سـ) = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٢) اذا كان : ﻡ +ب = ﻡ ب = ٥ فإن : ﻡ^{٢}ب + ﻡ ب^{٢} = ... [١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥]

(٣) النقطة (س ، ٧) تقع علي محور الصادات فإن : ٥س + ١ = ... [٦ ، ١ ، ٥ ، صفر]

(٤) اذا كان : (س – ٣)^{صفر} = ١ فإن : س ∋ ... [ح – {٣ ، ٤} ، ح – {٣} ، ح – {٤} ، ح – {١}]

(٥) د(س) = ٤س + ب ، د(٣) = ١٥ فإن : ب = ... [١٥٦ ، ٣ ، ٤ ، -٣]

(٦) اذا كان (٢ ، -٦) ∋ بيان الدالة د(س) = ك س – ٨ فإن : د(١) = ... [١ ، ٣ ، ٧ ، -٧]

السؤال الثاني :

(١) اذا كانت : سـ = {١٣ ، ١٤ ، ٤٣ ، ٨٤ } وكانت ع علاقة على سـ حيث ﻡ ع ب تعني (العدد ﻡ له نفس رقم آحاد العدد ب) لكل ﻡ ∋ سـ ، ب ∋ سـ اكتب بيان العلاقة ثم مثلها ديكارتيا ؟

(٢) مثل بيانيا الدالة : د(س) = -٢س ؟

السؤال الثالث :

(١) اذا كانت سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } وكانت د : سـ ← صـ حيث : د(س) = ٩ – س اوجد صور عناصر سـ بالدالة ، ثم ارسم مخطط بياني للدالة ؟

(٢) اذا كان : (٥س – ١ ، ٢٧) = (١٤ ، $ص^٣$) اوجـــــد قيمتي : س ، ص ؟

السؤال الرابع :

(١) ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = س (٦ – س) + ٤ في الفترة [-١ ، ٧] ؟

(٢) اذا كان : س = {٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٦} ، ع = {٥ ، ٧}

اوجد : (س ∩ ص) × (ع - ص) ؟

السؤال الخامس :

(١) اذا كان المستقيم الممثل للدالة : د(س) = ٦س – أ يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣)

اوجـــــد قيمة المقدار : ٢أ + ٧ب

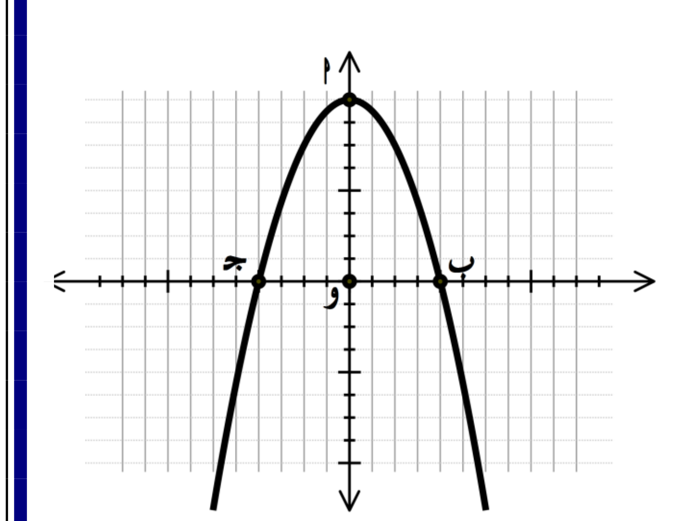
(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

حيث : د(س) = م – $س^٢$ ، أو = ٤ وحدات طول

اوجـــــد :

(أ) قيمة م

(ب) احداثيي النقطتين : ب ، جـ



انتهت الوحدة الأولى بحمد الله

الوحدة الثانية
النســــــــــــبة و التناســــــب

تعريف : هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع .. مثلا : النسبة بين العددين أ ،ب تكتب بطريقتين :

أ :ب او $\frac{أ}{ب}$ حيث : أ (مقدم النسبة) ، ب (تالي النسبة) او يسميا بحدي النسبة .

خواص النسبة :

النسبة لا تتغير اذا ضرب (او قسم) كلا من حديها في مقدار ثابت لا يساوي الصفر .

مثلا : $\frac{٣}{٥} = \frac{٣ \times ٧}{٥ \times ٧} = \frac{٢١}{٣٥}$ او $\frac{١٨}{٢٤} = \frac{١٨ \div ٦}{٢٤ \div ٦} = \frac{٣}{٤}$

امثلة محلولة :

(١) اوجد العدد الذي اذا اضيف لحدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣ ؟

الحل : نفرض العدد هو (ك) $\frac{٧ + ك}{١١ + ك} = \frac{٢}{٣}$ **حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين**

$٣ (٧ + ك) = ٢ (١١ + ك)$ $٢١ + ٣ ك = ٢٢ + ٢ك$ $٣ك - ٢ك = ٢٢ - ٢١$

ك = ١ العدد هو (١)

تدريب : (١) اوجد العدد الذي اذا اضيف لحدي النسبة ٥ : ١٣ فانها تصبح ٣ : ٥ ؟

(٢) اوجد العدد الذي اذا طرح من حدي النسبة ٤ : ١١ أصبحت ١ : ٢ ؟

مثال(٢) : عددان النسبة بينهما ٢ : ٣ فاذا اضيف للأول ١ ، وطرح ٣ من الثاني أصبحت النسبة بينهما ٧ : ٩ اوجـــــــــد العددان ؟

الحل : نفرض العدد الأول = ٢ك ، العدد الثاني = ٣ك

$\frac{٢ك + ١}{٣ك - ٣} = \frac{٧}{٩}$ **كما في المثال السابق : ٧ (٣ك - ٣) = ٩ (٢ك + ١) اكمل الحل بنفسك**

مثال(٣) : عدد صحيح موجب اذا اضيف مربعه لحدي النسبة ١ : ٢ أصبحت ١٠ : ١١ ؟

الحل : نفرض العدد = س مربعه = $س^2$

$\frac{س^2 + 1}{س^2 + 2} = \frac{10}{11}$ اذن : $11س^2 + 11 = 10س^2 + 20$ بالترتيب : $11س^2 - 10س^2 = 20 - 11$

$س^2 = 9$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين : $س = \pm 3$ العدد الموجب هو 3

مثال(٤) : اذا كان : $9س^2 - 12س ص + 4ص^2 = 0$ اوجد قيمة س : ص ؟

الحل : بالتحليل $(3س - 2ص)^2 = 0$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$3س - 2ص = 0$ منها : $3س = 2ص$ س : ص = ٢ : ٣

تدريب : عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٧ و اذا اضفنا لكل منهما ٢ أصبحت النسبة ٣ : ١٠ اوجدهما ؟

مثال(٥) : اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{3}{4}$ اوجد قيمة : $\frac{5أ + 3ب}{4ب - أ}$ ؟

الحل : نفرض أ = ٣م ، ب = ٤م بالتعويض في المقدار :

$\frac{5 \times 3م + 3 \times 4م}{4 \times 4م - 3م} = \frac{15م + 12م}{16م - 3م} = \frac{27م}{13م} = \frac{27}{13}$

تدريب : اذا كان : ٣ ك = ٥ هـ اوجد قيمة (٢ك – هـ) : (٣ هـ + ك) ؟

تمارين علي النسبة

(١) عددان النسبة بينهما ٣ : ٧ و اذا طرح منهما ٣ أصبحت النسبة ٢ : ٣ اوجد العددين ؟

(٢) اوجد العدد الذي اذا اضيف لحدي النسبة ٢ : ٥ أصبحت ١ : ٢ ؟

(٣) ما العدد الذي اذا طرح من حدي النسبة ٤٩ : ٦٩ أصبحت ٢ : ٣ ؟

(٤) ما العدد الذي اذا اضيف مربعه لحدي النسبة ٧ : ١١ أصبحت ٤ : ٥ ؟

(٥) عددان النسبة بينهما ٢ : ٣ و اذا اضفنا ٧ للعدد الأول ، و طرحنا ١٢ من العدد الثاني أصبحت النسبة بينهما ٥ : ٣ .. اوجد العددين ؟

(٦) اوجد العدد الذي اذا طرح ثلاثة امثاله من حدي النسبة ٤٩ : ٦٩ أصبحت ٢ : ٣ ؟

(٧) اذا كانت النسبة بين مساحة مستطيل و مساحة المربع المنشأ علي احد قطريه كنسبة ١٢ : ٢٥ اوجد النسبة بين بعدي المستطيل ؟

ثانيا : التناسب

هو تساوي نسبتين او اكثر .. أ : ب = حـ : ء او تكتب $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

امثلة :

مثال(١) : في كل مما يأتي اوجد قيمة ك لتصبح الكميات متناسبة :

(١) ١٥ ، ك ، ٥ ، ٦

الحل : $\frac{١٥}{ك} = \frac{٥}{٦}$ بالضرب التبادلي ٥ ك = ١٥ × ٦ ك = ٩٠ ÷ ٥ = ١٨

---

(٢) ٣ ، ٦ ، ٧ ، ك

الحل : $\frac{٣}{٦} = \frac{٧}{ك}$ بالضرب التبادلي ٣ ك = ٧ × ٦ ك = ٤٢ ÷ ٣ = ١٤

تمرين (١) : ٢ ، ٥ ، ٦ ، ك

الحل :

تمرين (٢) : ٣ ، ٢ ، ك+١ ، ٤

الحل :

مثال (٢) : اوجد الثالث المتناسب للكميات : ٤ ، ٦ ، ٣

الحلــ : نفرض الثالث المتناسب ك تصبح الكميات : ٤ ، ٦ ، ك ، ٣

$\frac{٤}{٦} = \frac{ك}{٣}$ اكمل الحل

مثال (٣) : اوجد العدد الذي يضاف الي الاعداد : ٧ ، ٩ ، ١٣ ، ١٦ لتصبح كميات متناسبة .

الحلــ : نفرض العدد هو : س الكميات تصبح : س + ٧ ، س + ٩ ، س + ١٣ ، س + ١٦

$\frac{س + ٧}{س + ٩} = \frac{س + ١٣}{س + ١٦}$ بالضرب التبادلي (س + ٧) (س + ١٦) = (س + ٩) (س + ١٣)

بفك الاقواس و التبسيط : $س^٢ + ٢٣س + ١١٢ = س^٢ + ٢٢س + ١١٧$

٢٣س — ٢٢س = ١١٧ — ١١٢ س = ٥

مثال (٤) : اذا كان $\frac{م}{ب} = \frac{٢}{٣}$ اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{٣ب^٢ - م ب}{٢م ب - م^٢}$

الحلــ : من خواص التناسب نجد ان : م = ٢ م ، ب = ٣ م حيث : م (ثابت ≠ صفر)

بالتعويض في المقدار : $\frac{٣ \times (٣م)^٢ - (٢م)(٣م)}{٢(٢م)(٣م) - (٢م)^٢} = \frac{٢٧م^٢ - ٦م^٢}{١٢م^٢ - ٤م^٢} = \frac{٢١م^٢}{٨م^٢} = \frac{٢١}{٨}$

تمرين : اذا كان $\frac{م}{٣} = \frac{ب}{٥}$ اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{٢م - ب}{٣ب - ٥م}$

مثال (٥) : اذا كان : ٢أ = ٣ب = حـ   اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{٣أ − ٢حـ + ٥ب}}{\text{٤أ + ٥حـ}}$

الحل : بقسمة المعطي ÷ ٦ : $\frac{\text{٢أ}}{\text{٦}} = \frac{\text{٣ب}}{\text{٦}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٦}}$ **بالتبسيط :** $\frac{\text{أ}}{\text{٣}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٦}}$

نفرض : أ = ٣م ، ب = ٢م ، حـ = ٦م   اكمل الحل

تمرين : اذا كان $\frac{\text{س}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{٣}}$ **اثبت ان :** $\frac{\text{س + ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{س + ٣ع}}{\text{١٤}}$

مثال (٦) : اذا كان أ : ب = ٢ : ٣ ، ب : حـ = ٤ : ٥ اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{أ + ٤ب}}{\text{٣ب − حـ}}$

الحل : أ : ب : حـ

٢ : ٣ :

: ٤ : ٥

٨ : ١٢ : ١٥

نفرض : أ = ٨م ، ب = ١٢م ، حـ = ١٥م   ثم نكمل الحل

مثال (٧) : اذا كان س : ص = ٥ : ٢ ، ص : ع = ٣ : ٧ وكانت : س + ص + ع = ٢١٠

اوجد قيمة : س ، ص ، ع

الحل : س : ص : ع

٥ : ٢ :

: ٣ : ٧

١٥ : ٦ : ١٤

نفرض : س = ١٥م ، ص = ٦م ، ع = ١٤م   بما ان : س + ص + ع = ٢١٠

١٥م + ٦م + ١٤م = ٢١٠ ومنها : ٣٥م = ٢١٠ اذن : م = $٢١٠ \div ٣٥ = ٦$

س = $١٥ \times ٦ = ٩٠$ ، ص = $٦ \times ٦ = ٣٦$ ، ع = $١٤ \times ٦ = ٨٤$

تمارين علي التناسب

السؤال الأول : اكمل ما يأتي :

(١) الأول المتناسب للكميات : ٤ ، ٦ ، ٨ هو .... (٢) اذا كان : ١٥ ، ك ، ٥ ، ٤ متناسبة فإن : ك = ...

(٣) ٧س = ٩ص فإن ص : س = ... (٤) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ = ...

(٥) اذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{٣} = ٢$ فإن : أ + ب = ...

(٦) اذا كان : $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٥}$ وكان ٢أ + ٣ب = ٤٦ فإن : أ = ...

السؤال الثاني :

(١) اوجد العدد الذي يضاف للاعداد : ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ لتصبح متناسبة

(٢) اذا كان س : ص : ع = ٣ : ٤ : ٥ اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{س - ص + ع}{س + ص}$

السؤال الثالث :

(١) اذا كان : $\frac{س + ٣ص}{٢س - ص} = \frac{٤}{٣}$ اوجد النسبة س : ص

(٢) اذا كان $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣}$ اثبت ان : (٢س − ٣ص) ، (س + ٢ص) ، ١٠ ، ٢٦ كميات متناسبة

السؤال الرابع :

(١) اذا كان ٢أ = ٧ب ، ٥ج = ٢د اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{أ ج + ب د}{أ ج - ب د}$

(٢) اذا كان : ٢٥س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٢٠س ص اوجد قيمة س : ص

خواص التناسب التي تستخدم لحل مسائل (اثبت ان)

خاصية (١) :

اذا كان أ ، ب ، حـ ، ء، هـ ، و كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = م$ حيث (م ≠ صفر)

منها : أ = ب م ، حـ = ء م ، هـ = و م (كل حرف = اللي تحته مضروب في م)

امثلة :

مثال (١) اذا كان أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة اثبت ان :

(١) $\frac{٧أ - ٤حـ}{٢أ + ٣حـ} = \frac{٧ب - ٤ء}{٢ب + ٣ء}$

الحل : نفرض ان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$ (م ≠ صفر) ∴ أ = ب م ، حـ = ء م

الطرف الأيمن : $\frac{٧أ - ٤حـ}{٢أ + ٣حـ} = \frac{٧ب م - ٤ء م}{٢ب م + ٣ء م} = \frac{م(٧ب - ٤ء)}{م(٢ب + ٣ء)} = \frac{٧ب - ٤ء}{٢ب + ٣ء}$ = الطرف الايسر

---

(٢) $\frac{أ^٢ - حـ^٢}{ب^٢ - ء^٢} = \frac{أ حـ}{ب ء}$

الحل : نفرض ان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$ (م ≠ صفر) ∴ أ = ب م ، حـ = ء م

الطرف الأيمن : $\frac{أ^٢ - حـ^٢}{ب^٢ - ء^٢} = \frac{(ب م)^٢ - (ء م)^٢}{ب^٢ - ء^٢} = \frac{ب^٢ م^٢ - ء^٢ م^٢}{ب^٢ - ء^٢} = \frac{م^٢(ب^٢ - ء^٢)}{ب^٢ - ء^٢} = م^٢$

الطرف الايسر : $\frac{أ حـ}{ب ء} = \frac{ب م \times ء م}{ب ء} = م^٢$ ∴ الطرفان متساويان

تمرين : اثبت ان : $\frac{أ^٢ + حـ^٢}{أ ب + حـ ء} = \frac{أ}{ب}$

مثال (٢) : اذا كان : $\frac{\text{أ}+\text{٥جـ}}{\text{أ}+\text{جـ}} = \frac{\text{ب}+\text{٥د}}{\text{ب}+\text{د}}$ **اثبت ان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة**

الحلــ : لاحظ ان هذا المثال عكس مثال رقم (١) في المطلوب (انتبه جيدا)

$\because \frac{\text{أ}+\text{٥جـ}}{\text{أ}+\text{جـ}} = \frac{\text{ب}+\text{٥د}}{\text{ب}+\text{د}}$ **بالضرب التبادلي** $(\text{أ}+\text{٥جـ})(\text{ب}+\text{د}) = (\text{أ}+\text{جـ})(\text{ب}+\text{٥د})$

$\text{أب}+\text{أد}+\text{٥جـب}+\text{٥جـد} = \text{أب}+\text{٥أد}+\text{جـب}+\text{٥جـد}$ **بالتبسيط**

$\text{أد}+\text{٥جـب} = \text{٥أد}+\text{جـب}$ **بإعادة الترتيب :** $\text{٥جـب}-\text{جـب} = \text{٥أد}-\text{أد}$

$\text{٤جـب} = \text{٤أد}$ **بالقسمة ÷ ٤** $\therefore \text{جـب} = \text{أد}$ $\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

تمرين : اذا كان : $\frac{\text{٢أ}+\text{ب}}{\text{٢أ}-\text{ب}} = \frac{\text{٢جـ}+\text{د}}{\text{٢جـ}-\text{د}}$ **اثبت ان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة**

تمارين علي الكميات المتناسبة

السؤال الأول : اذا كان أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة اثبت ان :

(١) $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}+\text{د}}{\text{د}}$

(٢) $\frac{\text{٣أ}-\text{٢جـ}}{\text{٥أ}+\text{٣جـ}} = \frac{\text{٣ب}-\text{٢د}}{\text{٥ب}+\text{٣د}}$

السؤال الثاني : اذا كان س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة اثبت ان :

(١) $\sqrt[3]{\frac{\text{٥س}^{3}-\text{٣ع}^{3}}{\text{٥ص}^{3}-\text{٣ل}^{3}}} = \frac{\text{س}+\text{ع}}{\text{ص}+\text{ل}}$

(٢) $\left(\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ع}+\text{ل}}\right)^{2} = \frac{\text{٢س}^{2}-\text{٣ص}^{2}}{\text{٢ع}^{2}-\text{٣ل}^{2}}$

السؤال الثالث :

(١) **اذا كان** $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢أ}+\text{ب}}{\text{٣س}}$ **اوجد قيمة س**

(٢) **اذا كان أ : ب : جـ = ٥ : ٧ : ٣ وكان أ + ب = ٢٧,٦ اوجد قيمة أ ، ب ، جـ**

خاصية (٢) :

اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و} = ...$ فإن : $\frac{أ + ح + هـ + ...}{ب + ء + و + ...}$ = احدي النسب

أي ان : $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = احدي النسب

امثلة :

(١) اذا كان : $\frac{أ}{س - ص + ع} = \frac{ب}{ص - ع + س} = \frac{ح}{ع - س + ص}$ اثبت ان : $\frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + ح}{ص}$

الحل :

ركز جيدا في مقدم الطرف الأيمن للمطلوب (أ + ب) كيف يمكن تكوينه من النسب المعطاة ؟؟

بجمع مقدمات و توالي النسبة الأولى و النسبة الثانية :

$\frac{أ}{س - ص + ع} + \frac{ب}{ص - ع + س} = \frac{أ + ب}{س - ص + ع + ص - ع + س} = \frac{أ + ب}{٢ س}$ = احدي النسب ــــــ (١)

الان انظر الي مقدم الطرف الايسر للمطلوب (ب + ح) كيف يمكن تكوينه من النسب المعطاة ؟؟؟

بجمع النسبة الثانية و النسبة الثالثة :

$\frac{ب}{ص - ع + س} + \frac{ح}{ع - س + ص} = \frac{ب + ح}{ص - ع + س + ع - س + ص} = \frac{ب + ح}{٢ ص}$ = احدي النسب ــــــ (٢)

من (١) ، (٢) : $\frac{أ + ب}{٢ س} = \frac{ب + ح}{٢ ص}$ = احدي النسب $\therefore \frac{أ + ب}{س} = \frac{ب + ح}{ص}$

---

(٢) اذا كان : $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٦}$ اثبت ان : $\frac{س + ص + ع}{٢س + ٣ص + ٣ع} = \frac{٧}{١٩}$

الحل : كيف نحصل علي مقدم الطرف الأيمن في المطلوب ؟؟

بجمع مقدمات و توالي النسب الثلاثة المعطاة

$$\frac{س + ص}{٣} + \frac{ص + ع}{٥} + \frac{ع + س}{٦} = \frac{٢س + ٢ص + ٢ع}{١٤} = \frac{٢ (س + ص + ع)}{١٤} = \frac{س + ص + ع}{٧} = \text{احدي النسب (١)}$$

كيف نحصل علي تالي الطرف الأيمن في المطلوب ؟؟

النسبة الاولي + ٢ × حدي النسبة الثانية + النسبة الثالثة

$$\frac{س + ص}{٣} + \frac{٢ص + ٢ع}{٢ \times ٥} + \frac{ع + س}{٦} = \frac{٢س + ٣ص + ٣ع}{١٩} = \text{احدي النسب ــــــ (٢)}$$

من (١) ، (٢) : $\frac{س + ص + ع}{٧} = \frac{٢س + ٣ص + ٣ع}{١٩}$ **بإعادة الترتيب :** $\frac{س + ص + ع}{٢س + ٣ص + ٣ع} = \frac{٧}{١٩}$

تمرين :

اذا كان : $\frac{س + ص}{٣} = \frac{ص + ع}{٢} = \frac{ع + س}{٥}$ **اثبت ان :** $\frac{س + ص + ع}{٥} = \frac{٢س + ٥ص + ٥ع}{١٦}$

التناسب المتسلسل

اذا كان ٲ ، ب ، حـ كميات متناسبة ... يقال ان ب وسطا متناسبا بين ٲ ، حـ

ويكون : $\frac{ٲ}{ب} = \frac{ب}{حـ}$ **في تناسب متسلسل**

مثال (١) :

(١) اوجد الوسط المتناسب بين العددين : ٣ ، ٢٧

الحل : الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{\text{حاصل ضرب العددين}} = \pm\sqrt{٣ \times ٢٧} = \pm ٩$

(٢) اوجد الوسط المتناسب بين : ٤ س ص^{٤} ، ٢٥ س^{٣} ص^{٢}

الحل : الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{٤ س ص^{٤} \times ٢٥ س^{٣} ص^{٢}} = \pm\sqrt{١٠٠ س^{٤} ص^{٦}} = \pm ١٠ س^{٢} ص^{٣}$

تمرين : اوجد الوسط المتناسب بين :

(١)١٢ ، ٣ (٢) ٥ س ص^{٣} ، ٢٠ س^{٣} ص^{٥}

مثال (٢) : اوجد العدد الذي اذا طرح من الاعداد : ١ ، ٣ ، ٦ فإنها تكون متناسبة ؟

الحل : نفرض العدد هو : س بعد الطرح : س – ١ ، س – ٣ ، س – ٦

$\frac{س - ١}{س - ٣} = \frac{س - ٣}{س - ٦}$ **بالضرب التبادلي :** $(س - ٣)^٢ = (س - ١)(س - ٦)$

بالتبسيط : $س^٢ - ٦س + ٩ = س^٢ - ٧س + ٦$ $\therefore ٧س - ٦س = ٦ - ٩$ $\therefore س = -٣$

تمرين : اوجد العدد الذي اذا اضيف للكميات : ١ ، ٤ ، ١٠ فإنها تصبح متناسبة ؟

خاصية هامة :

اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ $(م \neq صفر)$ **فإن :** $ب = حم ، أ = حم^٢$

و اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{ء} = م$ $(م \neq صفر)$ **فإن :** $ح = ءم ، ب = ءم^٢ ، أ = ءم^٣$

امثلة :

مثال (١) : اذا كان : أ ، ب ، ح كميات متناسبة اثبت ان : $\left[\frac{أ - ب}{ب - ح}\right]^٢ = \frac{أ}{ح}$

الحل : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ $(م \neq صفر)$ $\therefore ب = حم ، أ = حم^٢$

الأيمن : $\left[\frac{حم^٢ - حم}{حم - ح}\right]^٢ = \left[\frac{حم(م - ١)}{ح(م - ١)}\right]^٢ = م^٢$

الايسر : $\frac{حم^٢}{ح} = م^٢$ $\therefore$ **الطرفان متساويان**

تمرين : اذا كان : أ ، ب ، ح كميات متناسبة اثبت ان : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{أ - ب}{أ - ح}$

مثال (٢) : اذا كان ب وسطا متناسبا بين أ ، حـ اثبت ان : $\frac{أ^٢ - ٣أب + ب^٢}{ب^٢ - ٣ب حـ + حـ^٢} = \frac{أ}{حـ}$

الحل : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م$ (م ≠ صفر) ∴ ب = حـ م ، أ = حـ م^٢

الأيمن : $\frac{(حـ م^٢)^٢ - ٣(حـ م^٢)(حـ م) + (حـ م)^٢}{(حـ م)^٢ - ٣(حـ م) حـ + حـ^٢} = \frac{حـ^٢ م^٤ - ٣ حـ^٢ م^٣ + حـ^٢ م^٢}{حـ^٢ م^٢ - ٣ حـ^٢ م + حـ^٢}$

$= \frac{حـ^٢ م^٢ (م^٢ - ٣م + ١)}{حـ^٢ (م^٢ - ٣م + ١)} = م^٢$ ———— (١)

الايسر : $\frac{حـ م^٢}{حـ} = م^٢$ ———— (٢) الطرفان متساويان

مثال(٣) : اذا كان ب وسطا متناسبا بين أ ، حـ اثبت ان : $\frac{أ^٢}{ب^٢} + \frac{ب^٢}{حـ^٢} = \frac{٢أ}{حـ}$

الحل : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = م$ (م ≠ صفر) ∴ ب = حـ م ، أ = حـ م^٢

الأيمن : $\frac{(حـ م^٢)^٢}{(حـ م)^٢} + \frac{(حـ م)^٢}{حـ^٢} = \frac{حـ^٢ م^٤}{حـ^٢ م^٢} + \frac{حـ^٢ م^٢}{حـ^٢} = م^٢ + م^٢ = ٢ م^٢$ ———— (١)

الايسر : $\frac{٢ حـ م^٢}{حـ} = ٢ م^٢$ ———— (٢) الطرفان متساويان

تمرين : اذا كان ب وسطا متناسبا بين أ ، حـ

اثبت ان : $\frac{أ^٢ + أب + ب^٢}{ب^٢ + ب حـ + حـ^٢} = \frac{أ^٢ - ب^٢}{ب^٢ - حـ^٢}$

مثال (٤) : اذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل اثبت ان : $\frac{٢أ + ٣ء}{٣أ - ٤ء} = \frac{٢أ^٣ + ٣ب^٣}{٣أ^٣ - ٤ب^٣}$

الحل : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = م$ $(م \neq \text{صفر})$ $\therefore$ $ح = د م$ ، $ب = د م^{2}$ ، $أ = د م^{3}$

الأيمن : $\frac{2أ+3د}{3أ-4د} = \frac{2دم^{3}+3د}{3دم^{3}-4د} = \frac{د(2م^{3}+3)}{د(3م^{3}-4)} = \frac{2م^{3}+3}{3م^{3}-4}$ ——— (١)

الايسر : $\frac{2أ^{3}+3ب^{3}}{3أ^{3}-4ب^{3}} = \frac{2(دم^{3})^{3}+3(دم^{2})^{3}}{3(دم^{3})^{3}-4(دم^{2})^{3}} = \frac{2د^{3}م^{9}+3د^{3}م^{6}}{3د^{3}م^{9}-4د^{3}م^{6}}$

$= \frac{د^{3}م^{6}(2م^{3}+3)}{د^{3}م^{6}(3م^{3}-4)} = \frac{2م^{3}+3}{3م^{3}-4}$ ——— (٢) **الطرفان متساويان**

تمارين علي التناسب المتسلسل

السؤال الأول : اذا كان : أ ، ب ، ح كميات متناسبة اثبت ان :

(١) $\frac{أ}{ح} = \frac{ب^{2}}{ح^{2}}$ (٢) $\frac{أ-ب}{ب-ح} = \frac{أ+3ب}{ب+3ح}$ (٣) $\frac{2ح^{2}-3ب^{2}}{2ب^{2}-3أ^{2}} = \frac{ح^{2}}{ب^{2}}$

السؤال الثاني : اذا كان : أ ، ب ، ح ، د في تناسب متسلسل اثبت ان :

(١) $\frac{أ-ب}{ب-ح} = \frac{3ب+4ح}{3ح+4د}$ (٢) $\frac{3أ+5ح}{3ب+5د} = \frac{أ-4ح}{ب-4د}$

(٣) $\frac{أ+ب}{ح} = \frac{أب-بح}{أد-بد}$ (٤) $\left(\frac{أ+ب}{ب+ح}\right)^{2} = \frac{أ}{2ح} + \frac{ب}{2د}$

السؤال الثالث :

(١) اذا كان : ٣ ، ل ، ١٢ ، ك في تناسب متسلسل اوجد قيمتى : ل ، ك ؟

(٢) اذا كان : ص وسط متناسب بين س ، ع وكان : ع وسط متناسب بين ص ، ل اثبت ان : $\frac{س ع - ص ل}{س - ع} = ع$

(٣) أ ، ب ، ح اطوال اضلاع مثلث متناسبة ، وكان : أ + ب = ١٥سم ، ب + ح = ٢٢,٥ اوجد : أ ، ب

(٤) اذا كانت : ٥ وسطا متناسبا بين أ ، ب اوجد الوسط المتناسب بين : $(أ + \frac{1}{ب})$ ، $(ب + \frac{1}{أ})$

مراجعة عامة علي النسبة و التناسب

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة :

(١) الوسط المتناسب بين : ٥ ، ٢٠ هو .... [٢٥ ، ١٠٠ ، ١٠ ، ±١٠]

(٢) اذا كان : س ، ٣ ، ٦ ، ص في تناسب متسلسل فإن : $\frac{س}{ص}$ = ... [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٨}$]

(٣) اذا كان : ٢ ، ٦ ، س ، س + ١٥ كميات متناسبة فإن : س = ... [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

(٤) اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{ء}$ = ٣ فإن : أ = ... [٣ء ، ٦ء ، ٩ء ، ٢٧ء]

(٥) اذا كان : س ، ص ، ٣ ، ١ في تناسب متسلسل فإن : س = ... [٣ ، ١ ، ٩ ، ٢٧]

(٦) اذا كان : $\frac{أ}{٩} = \frac{ب}{٤}$ وكان : أ + ٢ب = ٣٤ فإن : أ = ... [١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٨]

السؤال الثاني :	السؤال الثالث :
(١) اذا كان : أ ، ب ، ح ، ء في تناسب متسلسل اثبت ان : $\frac{أ ب - ح ء}{ب^٢ - ح^٢} = \frac{أ + ح}{ب}$ (٢) اذا كان : $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٦} = \frac{ح}{٣}$ اوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{٣أ + ب}{٤ب + ح}$	(١) اذا كانت : س + ٢ ، س + ٦ ، س + ١٤ كميات متناسبة فأوجد قيمة : س (٢) اذا كان : أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة اثبت ان : $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{ح - ء}{ح + ء}$
السؤال الرابع :	**السؤال الخامس :**
(١) اذا كان : $\frac{٢س - ص}{س + ٢ص} = \frac{٤}{٧}$ اوجد قيمة س : ص (٢) عددان موجبان النسبة بينهما ٢ : ٣ مربع نصف اصغرهما يزيد عن ضعف اكبرهما بمقدار ١٦ فما هما العددان ؟	اذا كان : $\frac{س}{أ - ٢ب} = \frac{ص}{ب - ٢ح} = \frac{ع}{ح - ٢أ}$ اثبت ان : $\frac{س + ٢ص - ع}{ص + ٢ع} = \frac{٣أ - ٥ح}{ب - ٤أ}$

التغير الطردي و التغير العكسي

أولا : التغير الطردي :

يقال ان كميتان س ، ص تتغيران طرديا اذا كانتا تزيدان معا .. او تنقصان معا .. بنفس النسبة

التعبير الرياضي : ص $\propto$ س (ص تتغير تبعا لتغير س) ويكون :

اما : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ ـــــ (١) او ص = م س حيث (م $\neq$ صفر)ــــ (٢)

امثلة :

(١) اذا كانت ص $\propto$ س وكانت : س = ٢ عندما ص = ٦ اوجد العلاقة بين س ، ص ثم اوجد س عند ص = ٤

الحلــ : نستخدم العلاقة (٢) : ص = م س حيث (م $\neq$ صفر) بالتعويض : س = ٢ ، ص = ٦

٦ = ٢ م و منها : م = ٣ العلاقة بين س ، ص هي : ص = ٣ س

عند س = ٤ : ص = ٣ × ٤ = ١٢

---

(٢) اذا كانت : ص تتغير بتغير س ، وكانت س = ٤ عند ص = ٦ اوجد قيمة س عند ص = ٣

الحلــ : هنا نستخدم العلاقة (١) : $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ $\frac{٦}{٣} = \frac{٤}{س}$ س = ١٢ ÷ ٦ = ٢

تمرين :

(١) اذا كانت ص $\propto$ س وكانت : س = ٨ عند ص = ٢٤ اوجد العلاقة بين س ، ص

ثم اوجد ص عند س = ٢

(٢) اذا كانت : س تتغير تبعا لتغير ص ، وكانت : س = ٥ عند ص = ١٠ اوجد س عند ص = ٣٠

(٣) اذا كانت $ص^٣ \propto س^٢$ وكانت : س = ٤ عند ص = ٢ اوجد العلاقة بين س ، ص ثم اوجد س عند ص = ٥٠

الحلــ : $ص^٣ = م س^٢$ حيث (م $\neq$ صفر) بالتعويض عن : س = ٤ ، ص = ٢

٨ = ١٦ م و منها : م = $\frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$ العلاقة هي : $ص^٣ = \frac{١}{٢} س^٢$

عند ص = ٥٠ : ٥٠ = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ومنها : س^{٢} = ١٠٠ س = $\pm \sqrt{١٠٠}$ = $\pm$ ١٠

ثانيا : التغير العكسي :

يقال ان كميتان س ، ص تتغيران عكسيا اذا كان كمية منهما تزداد و في المقابل الكمية الأخرى تنقص او العكس ... بنفس النسبة

التعبير الرياضي : ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ (ص تتغير عكسيا بتغير س) ويكون :

اما : $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}}$ = $\frac{س_{٢}}{س_{١}}$ ـــــ (١) او ص = $\frac{م}{س}$ منها : س ص = م حيث (م $\neq$ صفر)ـــ (٢)

امثلة :

(١) اذا كانت ص تتغير عكسيا مع س ، وكانت ص = ٨ عند س = ٢ اوجد قيمة ص عند س = ٤

الحلـــ : $\frac{٨}{ص_{٢}}$ = $\frac{٤}{٢}$ بالضرب التبادلي : ص = ١٦ ÷ ٤ = ٤

(٢) اذا كانت : م تتغير عكسيا مع ب وكانت : م = ١٠ عند ب = ٢ اوجد العلاقة بين م ، ب ثم اوجد م عند ب = ٥ ؟

الحلـــ : م ب = م بالتعويض عن م = ١٠ ، ب = ٢ : م = ١٠ × ٢ = ٢٠

العلاقة هي : م ب = ٢٠ عند ب = ٥ : ٥م = ٢٠ ومنها : م = ٢٠ ÷ ٥ = ٤

تمرين :

(١) اذا كانت س تتغير عكسيا مع ص ، وكانت : س = ٨ عند ص = ٤ اوجد قيمة س عند ص = ١٦

(٢) اذا كان : م تتغير عكسيا مع ب وكانت : م = ١٢ عند ب = ٤ اوجد العلاقة بين م ، ب ثم اوجد م عند ب = ٨ ؟

امثلة متنوعة وردت في امتحانات سابقة :

(١) اذا كان : ص = ٤ + م ، م $\propto$ س حيث : س = ٢ عندما ص = ٦

اوجد : أولا : العلاقة بين س ، ص   ثانيا : قيمة ص عندما س = ٣

الحلــ :

∵ أ ∝ س   ∴ أ = مس   بالتعويض في العلاقة : ص = ٤ + أ

∴ ص = ٤ + مس   عند : س = ٢ ، ص = ٦

٦ = ٤ + ٢م   ∴ ٢م = ٢   ∴ م = ١   العلاقة هي : ص = ٤ + س ـــــ(المطلوب أولا)

عند : س = ٣   بالتعويض : ص = ٤ + ٣ = ٧ ـــــ (المطلوب ثانيا)

---

(٢) اذا كان : ص = ٧ + ك ، ك ∝ $\frac{١}{س^٢}$ حيث : ك = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

اوجد : العلاقة بين س ، ص   ثم اوجد قيمة ص عندما س = $\sqrt{٢}$

الحلــ :

∵ ك ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ ك = $\frac{م}{س^٢}$ منها : ك × س^٢ = م

عند : ك = ١٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$ م = ١٨ × $(\frac{٢}{٣})^٢$ = ٨   ∴ ك = $\frac{٨}{س^٢}$ بالتعويض

العلاقة هي : ص = ٧ + $\frac{٨}{س^٢}$ عند : س = $\sqrt{٢}$ ص = ٧ + $\frac{٨}{(\sqrt{٢})^٢}$ = ٧ + ٤ = ١١

(٣) اذا كانت : س^{٢}ص^٢ – ٦س ص + ٩ = ٠ اثبت ان : ص ∝ $\frac{1}{س}$

الحلــ : بتحليل المقدار : س^{٢}ص^٢ – ٦س ص + ٩ = ٠   (س ص – ٣) (س ص - ٣) = صفر

∴ س ص – ٣ = ٠   ∴ س ص = ٣ (ثابت)   ∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$

---

(٤) اذا كان : $\frac{\text{س − ص}}{\text{س + ص}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$ اثبت ان : ص ∝ س

الحل : باجراء الضرب التبادلي : ٤(س − ص) = ١(س + ص)

٤س − ٤ص = س + ص   بالترتيب : ٤س − س = ٤ص + ص   و منها : ٣س = ٥ص

∴ ص = $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ س   ∴ ص = م س (م = $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$)   ∴ ص ∝ س

---

(٥) الجدول الاتي يبين علاقة بين : س ، ص

س	٢	٥	٣
ص	١٥	ك	١٠

أولا : اوجد العلاقة بين س ، ص مبينا نوعها   ثانيا : اوجد قيمة : ك

ثالثا : اوجد قيمة : ص عندما س = ١,٥

الحل : بملاحظة بيانات الجدول نجد ان : ٢ × ١٥ = ٣ × ١٠ = ٣٠ أي ان : س ص = ثابت م

العلاقة بين س ، ص عكسية : س ص = ٣٠ ـــــــ (أولا)

عند : س = ٥ ، ص = ك   ٥ × ك = ٣٠   اذن : ك = ٣٠ ÷ ٥ = ٦ ـــــــ (ثانيا)

عند : س = ١,٥   ١,٥ × ص = ٣٠   اذن : ص = ٣٠ ÷ ١,٥ = ٢٠ ـــــــ (ثالثا)

تذكر ان :

التغير الطردي يمثل بيانيا بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل

تمرين :

اذا كان طول مستطيل (ل) يتغير عكسيا بتغير عرضه (ع)

عند ثبوت المساحة ، وكانت : ل = ١٢سم عندما ع = ٨سم

اوجد طول المستطيل عندما يكون عرضه ٣سم

تمارين عامة علي التغير

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة :

(١) اذا كانت : ص $\propto$ س^{٢} وكانت : س = ١ عند ص = ٢ فإن : ص = ... عند س = ٤ [٤ ، ١ ، ٨ ، ٣٢]

(٢) اذا كانت : س $\propto$ $\sqrt[٣]{ص}$ وكانت : س = ٦ عند ص = ٨ فإن ثابت التغير = ... [٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦]

(٣) مساحة الدائرة تتغير طرديا مع .... [نق ، نق^{٢} ، π ، πنق^{٢}]

(٤) اذا كانت : ص تتغير طرديا بتغير $\frac{١}{س}$ فإن : .....

[ص س = ١ ، ص = م س ، ص$_{١}$س$_{٢}$ = ص$_{٢}$س$_{١}$ ، ص$_{١}$س$_{١}$ = ص$_{٢}$س$_{٢}$]

السؤال الثاني :

(١) اذا كانت ص تتناسب طرديا مع س ، وكانت ص = ٥ عندما س = ١ .. اوجد العلاقة بين س ، ص ؟

(٢) اذا كانت : ص تتغير عكسيا بتغير س ، وكانت : ص = ٤ عندما س = ٦ .. اوجد ص عند س = ٨ ؟؟

(٣) اذا كان وزن جسم علي القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه علي الأرض (ر) وكان وزن الجسم ٨٤كجم علي الأرض ، ووزنه علي القمر ١٤كجم فما وزن جسم علي القمر اذا كان وزنه علي الأرض ١٤٤كجم ؟

(٤) اذا كان : $\frac{١٠س - ٣ص}{٤س + ص} = ٢$ اثبت ان : ص $\propto$ س

الإحصاء
الانحراف المعياري

جزء نظري (لابد من قراءته جيدا) :

*** مصادر جمع البيانات :**

(١) مصادر أولية : التي يحصل منها الباحث علي معلوماته مباشرة

امثلة : المقابلات الشخصية ، الاستبيانات .. تتميز بالدقة و لكنها تحتاج الي وقت و جهد

(٢) مصادر ثانوية : يحصل منها الباحث علي معلوماته بطرق غير مباشرة .. امثلة : الانترنت ، وسائل التواصل الاجتماعي (فيسبوك ، تويتر ، ....) ... تتميز بتوفير الوقت و الجهد و لكنها قد تكون غير دقيقة في اغلب الأحيان .

*** أساليب جمع البيانات :**

(١) أسلوب الحصر الشامل : امثلة (تعداد السكان ، الانتخابات ، ......)

(٢) أسلوب العينات : امثلة (تحليل دم مريض ، قياس جودة منتج لمصنع ما ، ....)

أنواع العينات :

(١) العينة الغير عشوائية : الاختيار المتحيز لفئة معينة

(٢) العينة العشوائية : و هي تنقسم الي : عينة عشوائية بسيطة (كما يحدث في حفلات السمر) او عينة عشوائية طبقية (عن طريق تقسيم المجتمع الي طبقات)

مقاييس التشتت

أولا : المدى

ابسط مقاييس التشتت .. هو الفرق بين اكبر قيمة و اصغر قيمة لمجموعة من المفردات

مثال : اوجد المدى لمجموعة القيم : ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١ ، ٩

الحل : المدى = ٩ − ١ = ٨

تمرين : اوجد المدى للقيم :

(١) −٣ ، −٢ ، −٥ ، −٩ ، −١ (٢) س + ٣ ، س − ٧ ، س + ١ ، س حيث : س ∈ $ص_+$

ثانيا : الانحراف المعياري

من ادق مقاييس التشتت .. هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي ..

- الانحراف المعياري لمجموعة من القيم : $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^2}{ن}}$

- **الانحراف المعياري لتوزيع تكراري (جدول) :** $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢} \times ك}{\text{مجـ ك}}}$

حيث :

مجـ (مجموع) ، س (المفردات) ، $\overline{س}$ (الوسط الحسابي) ، ن (عدد المفردات) ، ك (التكرارات)

امثلة :

(١) اوجد الانحراف المعياري للقيم : ٢ ، ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤

الحل :

الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\text{مجـ س}}{ن}$

$= \frac{٢ + ١٠ + ٨ + ٦ + ٤}{٥} = ٦$

من الجدول المقابل :

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$

$= \sqrt{\frac{٤٠}{٥}} = ٢\sqrt{٢} = ٢.٨٣$ **تقريبا**

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$
٢	٢ − ٦ = −٤	١٦
١٠	١٠ − ٦ = ٤	١٦
٨	٨ − ٦ = ٢	٤
٦	٦ − ٦ = ٠	٠
٤	٤ − ٦ = −٢	٤
	مجـ $(س - \overline{س})^{٢}$ =	٤٠

تمرين : اوجد الانحراف المعياري للقيم : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ١ ، ٩

(٢) اوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري :

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

الحلـ :

س	ك	س × ك
٠	٣	٠
١	١٦	١٦
٢	١٧	٣٤
٣	٢٥	٧٥
٤	٢٠	٨٠
٥	١٩	٩٥
مجـ	١٠٠	٣٠٠

$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ك$
٣ −	٩	٢٧
٢−	٤	٦٤
١−	١	١٧
٠	٠	٠
١	١	٢٠
٢	٤	٧٦
مجـ $(س - \overline{س})^2 \times ك$ =		٢٠٤

الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ\ س \times ك}{مجـ\ ك}$

$= \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^2 \times ك}{مجـ\ ك}}$

$= \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} =$ ٨٢١,٤ تقريبا

تمرين : اوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري :

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

(٣) اوجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للتوزيع التكراري :

المجموعة	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	٥٥ –	المجموع
التكرار	٢	٦	٨	٤	٢٠

الحلــــ :

م	س	ك	س × ك
٢٥ –	٣٠	٢	٦٠
٣٥ –	٤٠	٦	٢٤٠
٤٥ –	٥٠	٨	٤٠٠
٥٥ –	٦٠	٤	٢٤٠
مجـ		٢٠	٩٤٠

$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$	$(س - \overline{س})^٢ \times ك$
١٧-	٢٨٩	٥٧٨
٧-	٤٩	٢٩٤
٣	٩	٧٢
١٣	١٦٩	٦٧٦
مجـــ $(س - \overline{س})^٢ \times ك$ =		١٦٢٠

الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ\ س \times ك}{مجـ\ ك} = \frac{٩٤٠}{٢٠} = ٤٧$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{مجـ (س - \overline{س})^٢ \times ك}{مجـ\ ك}} = \sqrt{\frac{١٦٢٠}{٢٠}} = ٩$

تمرين : احسب الانحراف المعياري للتوزيع التكراري :

المجموعة	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

تمرين :

الجدول الاتي يبين درجات احد الطلاب في مادة الرياضيات .. احسب الانحراف المعياري :

الشهر	سبتمبر	اكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدرجة	١٢	١٥	١٨	١٥

حساب المثلثات

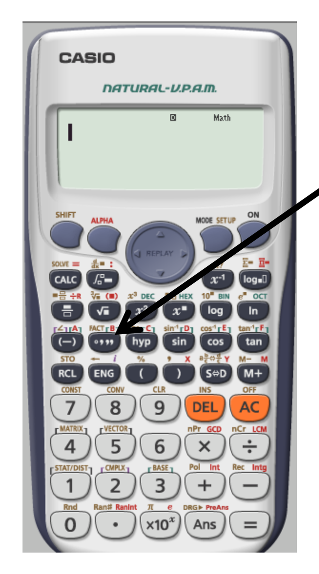
القياس الستيني للزاويا :

هو القياس المعروف لدينا .. امثلة : ق(أ) = ٣٠° ، ق(ح) = ٨٩° و هكـــذا

بالإضافة الي الزوايا التي تحتوي علي كسر عشري : ق(س) = ٣٠,٤٥° يتم تحويلها الي القياس الستيني

باستخدام الالة الحاسبة :





ثم = نجد انها أصبحت : ٢٧ /٣٠° تقرأ : ٣٠ درجة ، ٢٧ دقيقة

مثال : اكتب بالدرجات القياس الستيني للزاوية : ١٢٣,٥٨٩°

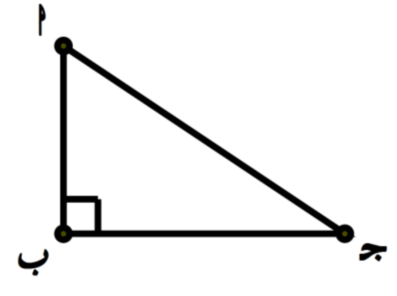
الحل : نتبع نفس الخطوات السابقة

القياس الستيني = ٢٠ // ٣٥ / ١٢٣° تقرأ : ١٢٣ درجة ، ٣٥ دقيقة ٢٠ ثانية

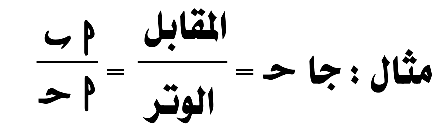
النسب المثلثية للزاوية الحادة :

في أي مثلث قائم الزاوية هناك علاقة تناسب تربط بين اطوال اطلاع المثلث و قياسات زواياه الحادة تعرف تلك العلاقة بالنسب المثلثية ..

مثال : في الشكل المقابل : مثلث أ ب ح قائم الزاوية في ب :



(١) جيب الزاوية (جـا) : هي النسبة بين طول الضلع المقابل : طول الوتر



مثال : جا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

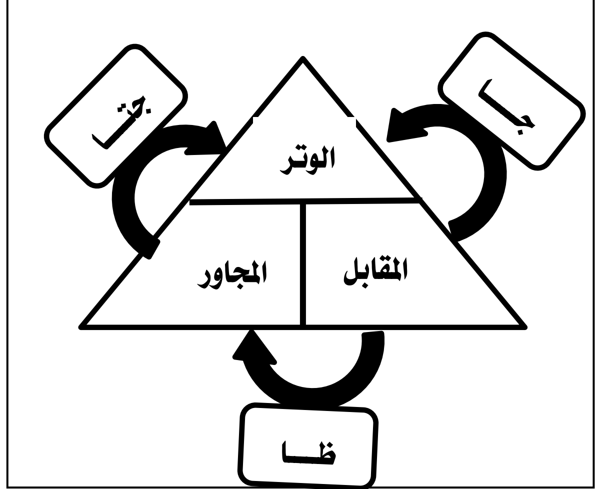
(٢) جيب تمام الزاوية (جتـا) : هي النسبة بين طول الضلع المجاور : طول الوتر

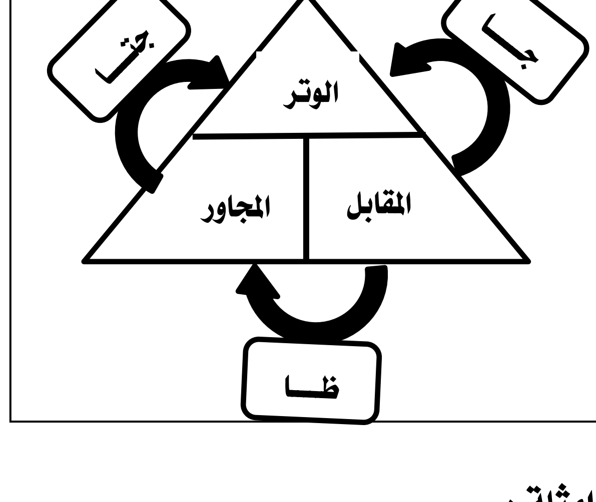
مثال : جتا ح = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

(٣) ظل الزاوية (ظـا) : هي النسبة بين طول الضلع المقابل : طول الضلع المجاور

مثال : ظا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

لتذكر القوانين يمكن الاستعانة بالشكل :





امثلة :

(١)في الشكل المقابل : مثلث أ ب حـ قائم في (ب) ، أ ب = ٣سم ، ب حـ = ٤سم

اوجد : أولا : طول أ حـ ثانيا : النسب المثلثية لزاوية (أ)

ثالثا : قيمة : جاأ جتا حـ + جتاأ جا حـ

الحل : من نظرية فيثاغورث

أ حـ = $\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم ـــ (أولا)

جاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتاأ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظاأ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٤}{٣}$ ـــ (ثانيا)

جاأ جتا حـ + جتاأ جا حـ = $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{٢٥}{٢٥}$ = ١ ـــ (ثالثا)

(٢) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في (حـ) ، ٢أ حـ = $\sqrt{٣}$ أ ب اوجد النسب المثلثية لزاوية ب

الحل : من خواص التناسب : $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

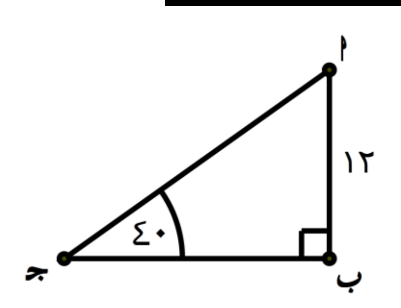
من فيثاغورث : ب حـ = $\sqrt{٤ - ٣}$ = $\sqrt{١}$ = ١ سم

جاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتاب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ظاب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$ = $\sqrt{٣}$

تمرين :

(١) أ ب حـ مثلث قائم في (ب) ، أ ب = ٦سم ، أ حـ = ١٠سم .. اوجد النسب المثلثية لزاوية حـ

(٢) س ص ع مثلث قائم في (ع) ، ٥ جـا س – ١ = ٣ .. اوجد قيمة : جاص جتاس + جتاص جاس



(٣) أ ب حـ مثلث قائم في ب ، ق(حـ) = ٤٠° ، أ ب = ١٢سم

أولا : اوجد طول أ حـ ، ب حـ ثانيا : احسب مساحة المثلث

الحلـــ : أ حـ هو الوتر ، ب حـ الضلع المجاور للزاوية ٤٠°

أ ب الضلع المقابل للزاوية ٤٠°

$$\text{جا حـ} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} \quad \text{ومنها : أ حـ} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا حـ}} = \frac{١٢}{\text{جا } ٤٠^\circ}$$

باستخدام الالة حيث (جا sin ، جتا cos ، ظا tan) أ حـ = ١٨,٧ سم

لايجاد طول ب حـ هنا يمكن بطريقتين : اما بنظرية فيثاغورث ، او بالنسب المثلثية

$$\text{ظا حـ} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} \quad \text{ومنها : ب حـ} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ظا حـ}} = \frac{١٢}{\text{ظا } ٤٠^\circ} = ١٤,٣ \text{ سم}$$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤,٣ = ٨٥,٨ سم^٢

تمرين :

أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٢ سم ، ق(حـ) = ٨٠° اوجد طول ب حـ

تمارين علي النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

(١) أ ب حـ مثلث قائم في (ب) ، أ ب = ٤سم ، أ حـ = ٥سم اوجد قيمة : جاأ × ظا حـ

(٢) أ ب حـ مثلث قائم في (ب) ، جا حـ = ٠,٦ اوجد النسب المثلثية لزاوية أ

(٣) س ص ع مثلث قائم في (ص) ، ١٣ جتا ع – ٥ = ٠ اوجد قيمة : جاس جتاع + جتاس جاع

(٤) سلم طوله ٦ متر يستند بطرفه العلوي أ علي حائط رأسي ، و طرفه السفلي ب علي ارض افقية ، فإذا كانت حـ هي مسقط أ علي الأرض ، وكانت زاوية ميل السلم علي الأرض = ٦٠° احسب طول أ حـ

(٥) أ ب حـ مثلث قائم في ب ، ظا حـ = $\frac{٣}{٤}$ ، أ ب = ١٢سم احسب طول : أ حـ ، ب حـ

(٦) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٢ : ٦ أوجد مقدارهما بالقياس الستينى

(٧) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ١ : ٤ أوجد مقدارهما بالقياس الستينى

(٨) إذا كانت النسبة بين قياسات زاويا مثلث كنسبة ٤ : ٥ : ٧ أوجد القياس الستينى لكل زاوية من زواياه

(٩) Δ ﺃ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه ﺃ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد النسب المثلثية الأساسية التالية : حا ﺃ ، حتا حـ ، حتا ﺃ ، طا حـ

(١٠) Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٩ سم ، س ع = ١٥ سم أوجد قيمة :

حتا س حتا ع – حا س حا ع

(٨) Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٥ سم ، ص ع = ١٢ سم أوجد قيمة :

حتا^2 س + حا^2 س

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

جدول النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا :

	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جـا sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
جتـا cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
ظـا tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	١

[١] " جيب " أي زاوية يساوى " جيب تمام " الزاوية المتممة لهذه الزاوية و العكس صحيح

فمثلاً : حا ٣٠° = حتا ٦٠° ، حتا ٣٠° = حا ٦٠° ، حا ٤٥° = حتا ٤٥°

[٢] لأي زاوية س يكون : طا س = $\frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$

أمثلة :

(١) أوجد قيمة : حا٣٠ْ حتا٦٠ْ + حتا٣٠ْ حا٦٠ْ + طا٤٥ْ

الحل

حا٣٠ْ حتا٦٠ْ + حتا٣٠ْ حا٦٠ْ + طا٤٥ْ = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{3}}{٢} \times \frac{\sqrt{3}}{٢} + ١ = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} + ١ = ٢$

---

(٢) أثبت أن : حا٣٠ْ حتا٦٠ْ − حا٦٠ْ طا٦٠ْ + حتا^{٢} ٣٠ْ = حا٣٠ْ − طا٤٥ْ

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{3}}{٢} \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$ ∴ **الطرفان متساويان**

---

(٣) أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة فيما يلى :

[١] حتا $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{١}{٢}$ [٢] طا (س + ١٠) = ١

[٣] حا س = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°

الحل

[١] ∵ حتا $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{١}{٢}$ ، ∵ حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ س = ٦٠°   و منها س = ١٢٠°

[٢] ∵ طا (س + ١٠) = ١   ، ∵ طا ٤٥° = ١

∴ س + ١٠ = ٤٥°   و منها س = ٣٥°

[٣] ∵ حا س = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°   ∴ حا س = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∵ حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٦٠°

---

(٤) أوجد ق(∠ حـ) في كل حالة مما يلى : حا حـ = ٠,٨ ، حتا حـ = ٠,١٤٥٧ ، طا حـ = ١,٣٦٧٨

الحل   ∵ حا حـ = ٠,٨








$\therefore$ ق ($\angle$ حـ) = $45'' \; 39' \; 46°$

ابدأ SHIFT cos 0,,,

$\because$ حتا حـ = ٠,١٤٥٧

$\therefore$ ق ($\angle$ حـ) = $45'' \; 39' \; 46°$ = ٠،١٤٥٧

ابدأ SHIFT tan 0,,,

$\because$ طا حـ = ١,٣٦٧٨

$\therefore$ ق ($\angle$ حـ) = $45'' \; 39' \; 46°$

تمارين علي حساب المثلثات

(١) أكمل ما يلى :

[١] إذا كان حا س = $\frac{1}{2}$ حيث س زاوية حادة فإن ق ($\angle$ س) = ٠٠٠٠

[٢] إذا كان طا ٢ س = $\sqrt{3}$ حيث س زاوية حادة فإن ق ($\angle$ س) = ٠٠٠٠

[٣] إذا كان حتا (س – ٢٠) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حيث س زاوية حادة فإن ق ($\angle$ س) = ٠٠٠٠

---

(٢) أوجد قيمة :

[١] حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا ٤٥° حتا ٤٥°   [٢] حتا^2 ٣٠° + حا^2 ٦٠° – طا^2 ٤٥°

---

(٣) أثبت أن :

[١] حا^2 ٣٠° = ٥ حتا^2 ٦٠° – طا^2 ٤٥°

[٢] طا^2 ٦٠° – طا^2 ٣٠° = (١ + طا ٦٠° طا ٣٠°) + حتا^2 ٣٠°

[٣] طا ٦٠° = $\frac{\text{٢ طا ٣٠}}{\text{١ – طا}^2\text{ ٣٠ }\square}$

[٤] حتا ٦٠° = ١ – ٢ حا^2 ٣٠°

---

(٤) أوجد قيمة س حيث س زاوية حادة فيما يلى :

[١] حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° – حتا ٦٠° حا ٣٠°

[٢] طا س = ٤ حتا ٦٠° حا ٣٠°

[٣] ٢ حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° + حتا ٦٠° حا ٣٠°

---

(٥) Δ ا ب حـ متساوى الساقين فيه ا ب = ا حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٨ سم أوجد :
ق ($\angle$ ب) ، مساحة سطح Δ ا ب حـ لأقرب رقمين عشريين

---

(٦) $\overline{\text{ا ب}}$ سلم طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوى ا على حائط رأسى و طرفه السفلى ب على أرض أفقية فإذا كان حـ مسقط نقطة ا على سطح الأرض و كان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض يساوى ٦٠° أوجد طول $\overline{\text{ا حـ}}$

الوسيط في الرياضيات – الصف الثالث الإعدادي – الفصل الدراسي الأول – إعداد : علاء الدين محمود عوض – ٠١١١٠٠٣١٨٩٩

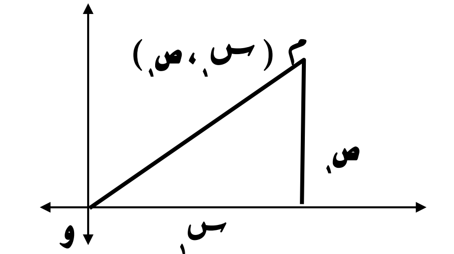
الهندســــــــــة التحليليــــــــــة

البعد بين نقطتين

البعد بين النقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

البعد بين النقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

ملاحظة:



في الشكل المقابل
بعد النقطة م $(س_1 ، ص_1)$ عن نقطة الأصل و $(٠ ، ٠)$

و م = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

مثال : أوجد البعد بين النقطتين ﻡ $(٥ ، ٦)$ ، ب $(-١ ، ٣)$

الحل

ﻡ ب = $\sqrt{(-١ - ٥)^2 + (٣ - ٦)^2}$ = $\sqrt{٣٦ + ٩}$ = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$

ملاحظات هــــــــامة جدا تستخدم لحل مسائل الاثبات :

(١) لإثبات أن النقط ﻡ ، ب ، حـ على استقامة واحدة : نوجد ﻡ ب ، ب حـ ، حـ ﻡ فإذا كان حـ ﻡ أكبر الأبعاد نثبت أن : ﻡ ب + ب حـ = حـ ﻡ

---

(٢) لإثبات أن النقط ﻡ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث : نوجد ﻡ ب ، ب حـ ، حـ ﻡ فإذا كان حـ ﻡ أكبر الأبعاد نثبت أن : ﻡ ب + ب حـ > حـ ﻡ

ثم لإثبات أن Δ ﻡ ب حـ قائم الزاوية : نثبت أن : $(ﻡ ب)^2 + (ب حـ)^2 = (حـ ﻡ)^2$

، لإثبات أن Δ ﻡ ب حـ منفرج الزاوية : نثبت أن : $(ﻡ ب)^2 + (ب حـ)^2 < (حـ ﻡ)^2$

، لإثبات أن Δ ﻡ ب حـ حاد الزاويا : نثبت أن : $(ﻡ ب)^2 + (ب حـ)^2 > (حـ ﻡ)^2$

، لإثبات أن Δ ﻡ ب حـ متساوى الساقين : نثبت تساوى أثنين منهما

، لإثبات أن Δ ﻡ ب حـ متساوى الأضلاع : نثبت تساوى الأبعاد الثلاثة

---

(٣) لإثبات أن الشكل الرباعى ﻡ ب حـ ء متوازى أضلاع : نثبت أن : ﻡ ب = حـ ء ، ب حـ = ﻡ ء

---

(٤) لإثبات أن الشكل الرباعى ﻡ ب حـ ء مستطيل : نثبت أن : ﻡ ب = حـ ء ، ب حـ = ﻡ ء ، ﻡ حـ = ب ء

---

(٥) لإثبات أن الشكل الرباعى ﻡ ب حـ ء مربع : نثبت أن : ﻡ ب = ب حـ = حـ ء = ﻡ ء ، ﻡ حـ = ب ء

---

(٦) لإثبات أن النقط ﻡ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة مركزها م : نثبت أن : م ﻡ = م ب = م حـ = م ء

أمثلة : (١) إذا كانت أ (٤ ، ٢) ، ب (٥ ، – ١) ، حـ (٠ ، – ٢) ، ء (– ١ ، ١) فأثبت أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

الحل

$أب = \sqrt{(5-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$ ، $بحـ = \sqrt{(0-5)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{26}$

$حـء = \sqrt{(-1-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$ ، $أء = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$

∴ أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء ∴ الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

(٢) هل المثلث الذى رؤوسه النقط أ (– ٢ ، ٤) ، ب (٣ ، – ١) ، حـ (٤ ، ٥) متساوى الساقين أم متساوى الأضلاع

الحل

$أب = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{50}$ ، $بحـ = \sqrt{(4-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37}$

$حـأ = \sqrt{(4+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{37}$

، ∵ ب حـ = حـ أ ∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين

(٣) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٤) ، ب (– ١ ، – ٢) ، حـ (٢ ، – ٣) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

$أب = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{40}$ ، $بحـ = \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{10}$

$حـأ = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{50}$

، ∵ $(أب)^2 + (بحـ)^2 = (حـأ)^2$ ∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2} \times \sqrt{40} \times \sqrt{10} = \frac{1}{2} \times \sqrt{400} = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ وحدة مربعة

(٤) أثبت أن الشكل الرباعي الذي رؤوسه أ (٢ ، ٤) ، ب (– ٣ ، ٠) ، حـ (– ٧ ، ٥) ، ء (– ٢ ، ٩) يكون مربع ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

$أب = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{41}$ ، $بحـ = \sqrt{(-7+3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{41}$

$حـء = \sqrt{(-2+7)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{41}$ ، $ءأ = \sqrt{(-2-2)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{41}$

$أحـ = \sqrt{(-7-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{82}$ ، $بء = \sqrt{(-2+3)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{82}$

∵ أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ ، أ حـ = ب ء ∴ أ ب حـ ء مربع

مساحته = $\sqrt{41} \times \sqrt{41} = 41$ وحدة مربعة

(٥) أثبت أن الشكل الرباعي الذي رؤوسه أ (١ ، – ٢) ، ب (– ٢ ، ٢) ، حـ (– ٥ ، – ٢) ، ء (– ٢، – ٦) يكون معين ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

أب $= \sqrt{(-٢-١)^٢ + (-٢-٢)^٢} = ٥$ ، بحـ $= \sqrt{(-٥+٢)^٢ + (-٢-٢)^٢} = ٥$

حـ ء $= \sqrt{(-٢+٥)^٢ + (-٦+٢)^٢} = ٥$ ، ء أ $= \sqrt{(-٢-١)^٢ + (-٦+٢)^٢} = ٥$

أحـ $= \sqrt{(-٥-١)^٢ + (-٢+٢)^٢} = ٦$ ، ب ء $= \sqrt{(-٢+٢)^٢ + (-٦-٢)^٢} = ٨$

∵ أب = بحـ = حـ ء = ء أ ، أحـ ≠ ب ء ∴ أ ب حـ ء معين

مساحته $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨ = ٢٤$ وحدة مربعة

---

(٦) أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه أ (– ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) يكون مستطيل ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

أب $= \sqrt{(٥+١)^٢ + (١-٣)^٢} = \sqrt{٤٠}$ ، بحـ $= \sqrt{(٦-٥)^٢ + (٤-١)^٢} = \sqrt{١٠}$

حـ ء $= \sqrt{(٠-٦)^٢ + (٦-٤)^٢} = \sqrt{٤٠}$ ، ء أ $= \sqrt{(٠+١)^٢ + (٦-٣)^٢} = \sqrt{١٠}$

أحـ $= \sqrt{(٦+١)^٢ + (٤-٣)^٢} = \sqrt{٥٠}$ ، ب ء $= \sqrt{(٠-٥)^٢ + (٦-١)^٢} = \sqrt{٥٠}$

∵ أب = حـ ء ، بحـ = ء أ ، أحـ = ب ء ∴ أ ب حـ ء مستطيل

مساحته $= \sqrt{٤٠} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٤٠٠} = ٢٠$ وحدة مربعة

---

(٧) أثبت أن النقط أ (٣ ، ٢) ، ب (١ ، – ٤) ، حـ (١ ، ٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م = (٢ ، – ١) ثم أوجد مساحة سطح الدائرة

الحل

م أ $= \sqrt{(٢-٣)^٢ + (-١-٢)^٢} = \sqrt{١٠}$ ، م ب $= \sqrt{(٢-١)^٢ + (-١+٤)^٢} = \sqrt{١٠}$

م حـ $= \sqrt{(٢-١)^٢ + (-١-٢)^٢} = \sqrt{١٠}$

∵ م أ = م ب = م حـ ∴ أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة م

---

(٨) أثبت أن النقط أ (– ١ ، ٢) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٤) تقع على استقامة واحـــــدة

الحل

أب $= \sqrt{(١-(-١))^٢ + (٣-٢)^٢} = \sqrt{٥}$ ، بحـ $= \sqrt{(٣-٢)^٢ + (٤-٣)^٢} = \sqrt{٥}$

أحـ $= \sqrt{(٣-(-١))^٢ + (٤-٢)^٢} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

∴ أب + بحـ = أحـ ∴ النقط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة

تمارين

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – البعد بين النقطتين ٢ (١ ، – ٨) ، ب (٦ ، ٤) يساوى ٠٠٠٠ وحدة طول [٥ ؛ ٧ ؛ ١٢ ؛ ١٣

٢ – إذا كانت ٢ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، – ١) فإن : ٢ ب = ٠٠٠٠ [٧ ؛ ٥ ؛ ٥√٥ ؛ ٢٥]

٣ – المثلث الذى رؤوسه النقط (١ ، ١) ، (– ٤ ، ٣) ، (١ ، ٥) ٠٠٠٠

[متساوى الساقين ؛ متساوى الأضلاع ؛ مختلف الأضلاع]

٤ – إذا كان ٢ب قطر في دائرة حيث ٢ (٢ ، – ٢) ، ب (– ٤ ، ٦) فإن مساحة الدائرة = ٠٠وحدة مربعة

[١٠ ؛ ١٠ π ؛ ١٠٠ π ، ٢٥ π]

٥ – الدائرة التى مركزها النقطة (٣ ، – ٢) و تمر بالنقطة (– ٢ ، ١٠) يكون محيطها = ٠٠٠٠ وحدة طول

[١٣ π ؛ ٢٦ π ؛ ١٦٩ π ، ١٥ π]

٦ – إذا كان حـ ء = √٥ حيث حـ (ك ، ١) ، ء (٢ ، ك) فإن ك = ٠٠٠٠

[٠ ؛ ٣ ؛ (٠ ، ٣) ؛ { ٠ ، ٣ }]

---

(٢) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه (– ٢ ، ٤) ، (١ ، – ٢) ، (١ ، ٦) متساوى الساقين

---

(٣) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه ٢ (٦ ، ١) ، ب (٣ ، – ٢) ، حـ (– ١ ، ٢) قائم الزاوية و أوجد مساحته

---

(٤) أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه ٢ (٥ ، ٣) ، ب (٥ ، – ٣) ، حـ (– ٧ ، – ٣) ، ء (– ١ ، ٣)
يكون مربع ثم أوجد مساحة سطحه

---

(٥) أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه ٢ (٠ ، ١) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (١ ، ٨) ، ء (– ٣ ، ٤)
يكون مستطيل ثم أوجد مساحة سطحه

---

(٦) أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه ٢ (٥ ، ٩) ، ب (– ١ ، ٧) ، حـ (– ٣ ، ١) ، ء (٣ ، ٣)
يكون معين ثم أحسب محيطه

---

(٧) أثبت أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه ٢ (٣ ، ٤) ، ب (٥ ، ٠) ، حـ (١ ، – ٤) ، ء (– ١ ، ٠)
يكون متوازى أضلاع

---

(٨) أثبت أن النقط ٢ (٠ ، ٥) ، ب (– ٣ ، ٢) ، حـ (٣ ، ٢) تقع على دائرة واحدة مركزها
م = (٠ ، ٢) ثم أوجد مساحة سطح الدائرة

---

(٩) إثبت أن النقط ٢ (٧ ، – ١١) ، ب (– ٢ ، ١) ، حـ (١ ، – ٣) تقع على إستقامة واحـــــدة

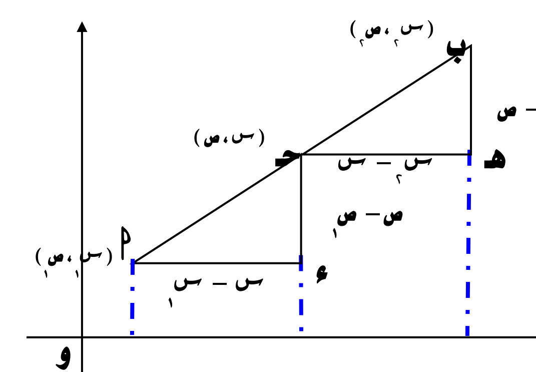
---

(١) إذا كان ٢ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٥ ، ١) و كان ٢ ب = ب حـ أوجد قيمة س

(٢) إذا كان ٢ (٣ ، ٢) ، ب (٦ ، ٠) ، حـ (١٢ ، ٨) أوجد كل من : ٢ ب ، ب حـ ، ٢ حـ ثم بين
هل ٢ب ، ب حـ متعامدان أم لا ؟ مع ذكر السبب

إحداثيـــا منتصف قطعة مستقيمة

و بوجه عام يمكن استنتاج قانون إحداثي منتصف قطعة مستقيمة كما يلي :



إذا كانت : أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) ، جـ (س ، ص)

حيث جـ منتصف $\overline{أب}$ **من تطابق** Δ أ جـ ء ، Δ جـ ب هـ

ينتج أن : أ ء = جـ هـ

∴ س – $س_1$ = $س_2$ – س

∴ ٢ س = $س_1$ + $س_2$ ∴ س = $\frac{س_1 + س_2}{٢}$

، **بالمثل** ء جـ = هـ ب

∴ ص – $ص_1$ = $ص_2$ – ص

∴ ٢ ص = $ص_1$ + $ص_2$ ∴ س = $\frac{ص_1 + ص_2}{٢}$

من ذلك نستنتج قانون احداثيي نقطة المنتصف = (مجموع السينات ÷ ٢ ، مجموع الصادات ÷ ٢)

او : جـ = ($\frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{٢}$)

امثلة :

(١) أوجد إحداثي نقطة م منتصف أ ب حيث : أ (٣ ، ٥) ، ب (١ ، – ١)

الحل

م = ($\frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{٢}$) = ($\frac{٣+١}{٢}$ ، $\frac{٥–١}{٢}$) = (٢ ، ٢)

---

(٢) إذا كانت م (١ ، ٢) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (س ، ١) ، ب (٣ ، ص)
أوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ م هى نقطة المنتصف ∴ (١ ، ٢) = ($\frac{س+٣}{٢}$ ، $\frac{١+ص}{٢}$)

∴ ١ = $\frac{س+٣}{٢}$ ∴ ٢ = س + ٣ ومنها س = – ١

، ٢ = $\frac{١+ص}{٢}$ ∴ ٤ = ١ + ص ومنها ص = ٣

---

(٣) إذا كانت م (١ ، ٢) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (– ٢ ، ١) فاوجد إحداثى ب

الحل

بفرض أن ب = (س ، ص) ∵ م هى نقطة المنتصف ∴ (١ ، ٢) = ($\frac{–٢ + س}{٢}$ ، $\frac{١+ص}{٢}$)

∴ – ٢ + س = ٢ ومنها س = ٤ ، ١ + ص = ٤ ومنها ص = ٣

∴ ب = (٤ ، ٣)

(٤) – إذا كانت ا = (– ١ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، حـ = (٧ ، ٥) ، ء = (س ، ص) هـــى رؤوس متوازي أضلاع فى ترتيب دوري واحد أوجد إحداثي نقطة ء

الحل

∵ ا ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\left(\frac{-١+٧}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢} \right) = \left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{١+ص}{٢} \right)$

∴ $(٣ ، ٤) = \left(\frac{٥+س}{٢} ، \frac{١+ص}{٢} \right)$

∴ ٦ = ٥ + س ومنها س = ١ ، ٨ = ١ + ص و منها ص = ٧ ∴ ء (١ ، ٧)

امثلة أخرى وردت في امتحانات سابقة :

(١) اب قطر في دائرة م ، حيث : ا(-٦ ، -٢) ، ب(-٨ ، ٤) اوجد : احداثيي المركز م ، طول نصف قطر الدائرة

متروك للطالب :

(٢) اذا كانت ج(س ، -٥) منتصف اب حيث : ا(١ ، -٢) ، ب(٣ ، ص) اوجد قيمتي : س ، ص

متروك للطالب :

تمارين عامة علي الدرس

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – إذا كان : ا (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، – ٩) فإن منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ = ...

[(٦ ، – ٤) ؛ (–٧ ، ٩) ؛ (٣ ، –٢) ؛ (٣ ، –٧)]

٢ – إذا كان : ا (٥ ، ٣) ، ب (١ ، ل) ، كانت حـ = (٣ ، ٥) هى منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

فإن : ل = ... [١ ؛ ٥ ؛ ٧ ؛ ٨]

٣ – إذا كانت حـ (٥ ، ٧) هى منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ب (٣ ، ٨) فإن إحداثيى ا هى ....

[(–١ ، ٢) ؛ (١٣ ، ٢٤) ؛ (١ ، ٧,٥) ؛ (٧ ، ٦)]

٤ – إذا كانت م نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع ا ب حـ ء حيث ا (٣ ، ٥) ، حـ (– ٣ ، ١)

فإن : إحداثيى م هى .... [(٠ ، ٢) ؛ (٠ ، ٣) ؛ (٣ ، ٣) ؛ (–٣ ، ٣)]

---

(٢) إذا كانت ا (٤ ، ٢) ، ب (٠ ، – ٢) ، حـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ أثبت أن حـ تقع على محور السينات

(٣) إذا كانت النقطة (١ ، ص) منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا (س ، ٣) ، ب (٠ ، ٧) أوجد س ، ص

(٤) إذا كانت نقطة الأصل هى نقطة منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ حيث ا (١ ، ٣) فاوجد إحداثى ب

(٥) إثبت أن النقط ا (– ١ ، ٢) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٣ ، ٤) على إستقامة واحدة وأن ب منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

(٦) إذا كانت ا (٤ ، ٢) ، ب (٥ ، – ١) ، حـ (٠ ، – ٢) ، ء (– ١ ، ١) فأثبت أن الشكل ا ب حـ ء متوازى أضلاع

(٧) إذا كانت ا (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، – ٥) ، حـ (٠ ، – ٣) ، ء (س ، ص) هى رؤوس متوازى أضلاع فى ترتيب دورى واحد أوجد إحداثيى ء

ميل الخط المستقيم

تعريف :

ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

أى أن : ميل الخط المستقيم = طا هـ

حيث : هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

أمثلة :

(١) أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٨ َ ٣٦ °

الحل

∵ م = طا هـ ∴ م = طا ٤٨ َ ٣٦ ° = ٠,٧٤٨١






---

(٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم = ١,٤٨٦٥

الحل

∵ م = طا هـ ∴ طا = ١,٤٨٦٥ ∴ ق (∠ هـ) = ١٣ ً ٤ َ ٥٦ °









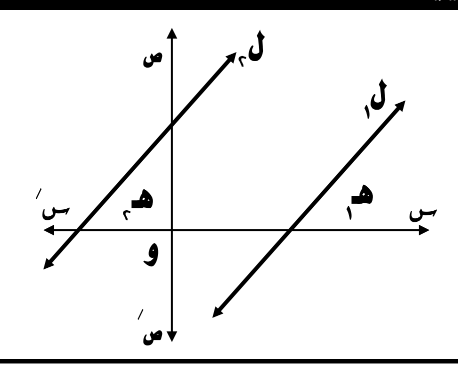
العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

إذا كان : $ل_١$ // $ل_٢$ فإن $م_١ = م_٢$

أى أن : إذا توازى مستقيمان فإن ميلاهما يكونان متساويين ،

و العكس صحيح فإذا كان : $م_١ = م_٢$ فإن $ل_١$ // $ل_٢$

أى أن : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين



أمثلة :

(١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠ °

الحل

ميل المستقيم الأول " $م_١$ " = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٥ - ٤}$ = $\sqrt{٣}$

ميل المستقيم الأول " $م_٢$ " = طا ٣٠ ° = $\sqrt{٣}$ ∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

(٢) بإستخدام الميل أثبت أن النقط أ (٤ ، ٣) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (٢ ، – ١) تقع على إستقامة واحدة

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١-٣}{٣-٤}$ = ٢ ، ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $\frac{-١-٣}{٢-٤}$ = ٢

، ∵ نقطة أ مشتركة ∴ أ ، ب ، حـ على إستقامة واحدة

(٣) إذا كان المستقيمان الذين ميلاهما $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٦}{س}$ متوازيان أوجد قيمة س

الحل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ ميلاهما متساويان

∴ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٦}{س}$ ∴ ٣ س = ٢٤ و منها س = ٨

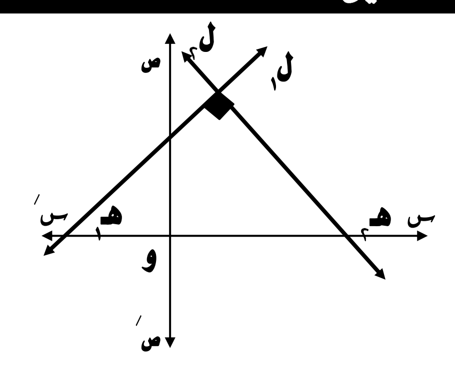
العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين



إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$ فإن $م_١ \times م_٢ = -١$

أى أن : حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = – ١

و العكس صحيح فإذا كان : $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن $ل_١ \perp ل_٢$



أمثلة :

(١) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (– ٣ ، ٥) ، (٤ ، – ٢) عمودي على المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

الحل

ميل المستقيم الأول " $م_١$ " = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-٢-٥}{٤-(-٣)}$ = – ١

ميل المستقيم الأول " $م_٢$ " = طا ٤٥° = ١

، ∵ $م_١ \times م_٢$ = – ١ × ١ = – ١ ∴ المستقيمان متعامدان

(٢) إذا كان أ = (١ ، ٥) ، حـ = (٣ ، ١) ، ء = (ك ، ٢) وكان $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ متعامدان فأوجد قيمة ك

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $\frac{١-٥}{٣-١}$ = – ٢ ، ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = $\frac{٢-١}{ك-٣}$

، ∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـء}$ متعامدان ∴ – ٢ × $\frac{٢-١}{ك-٣}$ = – ١

∴ ك – ٣ = ٢ و منها ك = ٥

ملاحظات هامة :

- **يمكن استخدام العلاقة بين ميلي مستقيم في اثبات ان مثلث قائم او في اثبات ان الشكل الرباعي متوازي اضلاع**
- **ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر ، ميل الموازي لمحور الصادات غير معرف**

(٣) اثبت ان : س(٢ ، −٢) ، ص(٨ ، ٤) ، ع(٥ ، ٧) ، ل(−١ ، ١) تمثل رووس مستطيل

الحلــ : سبق حل تلك المسألة في درس البعد بين نقطتين ، و يمكن حلها بالميل أيضا ..

نوجد : ميل $\overline{\text{س ص}}$ ، ميل $\overline{\text{ص ع}}$ ، ميل $\overline{\text{ع ل}}$ ، ميل $\overline{\text{ل س}}$ و نلاحظ ان هناك علاقات توازي و تعامد

تمارين علي درس الميل

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – إذا كان : $ل_١$ // $ل_٢$ ، كان ميل المستقيم $ل_١$ = ١/ فإن ميل المستقيم $ل_٢$ = ...

[−٢ ؛ −١/ ؛ ١/ ؛ ٢]

٢ – إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$ ، كان ميل المستقيم $ل_١$ = ٣ ميل المستقيم $ل_٢$ = ...

[١/ ؛ −١/ ؛ ٣ ؛ −٣]

٣ – إذا كان : المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٧) ، (٣ ، ك) يوازى محور السينات فإن ك = ...

[−٧ ؛ ٧ ؛ ١/ ؛ −١/]

٤ – إذا كان : المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ك) ، (٤ ، ٠) عمودياً على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الإتجاه الموجب لمحو السينات فإن ك = ...

[٣√ ؛ −٣√ ؛ ٣ ؛ −٣]

---

(٢) إذا كان المثلث الذى رؤوسه النقط ا (− ١ ، ك) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (− ٣ ، − ٢) قائم الزاوية في ب
أوجد قيمة ك

(٣) إذا كانت النقط ا (س ، − ٥) ، ب (١ ، − ١) ، حـ (٢ ، ٠) على إستقامة واحدة أوجد قيمة س

(٤) أثبت بإستخدام الميل أن المثلث الذى رؤوسه ا (− ٣ ، ٤) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (١ ، ٨) قائم الزاوية

(٥) إثبت بإستخدام الميل أن الشكل الرباعى الذى رؤوسه النقط ا (− ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) يكون مستطيل

(٦) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط ا (− ١ ، ٥) ، ب (٤ ، ٠) ، حـ (٥ ، ٦) متساوى الساقين و أوجد هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ثم أثبت أن $\overline{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{ا ب}}$

سؤال حلو :

ا ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ فإذا كان ا (٩ ، − ٢) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (س ، − س)
أوجد إحداثيى نقطة حـ

معادلة الخط المستقيم

بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات هي :

ص = م س + حـ حيث : م ، حـ ∈ ح

ملاحظة:

يمكن وضع معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + حـ = ٠ ، ب ≠ ٠

على الصورة : ص = م س + حـ كما يلي :

أ س + ب ص + حـ = ٠ ∴ ب ص = − أ س − حـ بالقسمة على ب

∴ ص = $\frac{أ}{ب}$ − $\frac{حـ}{ب}$ و هى الصورة : ص = م س + حـ

حيث : م = − $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ ، − $\frac{حـ}{ب}$ هو طول الجزء المقطوع من محور الصادات

أمثلة :

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٤) ويوازى المستقيم ل الذى معادلته : ص = ٢ س − ١

الحل

∵ ميل المستقيم ل = ٢ ∴ ميل المستقيم الموازى له = ٢

∴ معادلة المستقيم هى : ص = ٢ س + حـ ∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٤)

∴ ٤ = ٢ × ١ + حـ ومنها حـ = ٢ ∴ ص = ٢ س + ٢

---

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين

أ (٢ ، ٣) ، ب (٤، ٢)

الحل

ميل $\overleftrightarrow{أ جـ}$ = $\frac{٢ - ٣}{٤ - ٢}$ = − $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل العمودى عليه = ٢

معادلة المستقيم هى : ص = ٢ س + حـ ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، − ١)

∴ − ١ = ٢ × ٢ + حـ و منها حـ = − ٥ ∴ ص = ٢ س − ٥

---

(٣) اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥)

الحل

م = $\frac{٥ - ٣}{٢ - ١}$ = ٢ ص = ٢س + جـ بالتعويض باي نقطة (١ ، ٣) : ٣ = ٢ + جـ منها : جـ = ١

المعادلة هي : ص = ٢س + ١

تمارين علي معادلة الخط المستقيم

(١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١ – ميل المستقيم : ٢ ص = ٤ س – ١ هو …… (٤ ؛ ٢ ؛ $\frac{١}{٢}$ ؛ – ٢)

٢ – ميل المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، – ١) ، (٣ ، ٠) هو …… (٤ ؛ ٢ ؛ $\frac{١}{٢}$ ؛ – ٢)

٣ – ميل المستقيم الموازى للمستقيم : ص = ٣ س + ٤ هو …… ($\frac{١}{٣}$ ؛ ٣ ؛ ٤ ؛ – ٣)

٤ – ميل المستقيم العمودى على المستقيم ٣ ص = ١ – ٦ س هو …… (٦ ؛ ٢ ؛ $\frac{١}{٢}$ ؛ – ٢)

---

(٢) إذا كان المستقيم ك س + ٣ ص – ٧ = ٠ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (– ١ ، ٤)
أوجد قيمة ك

(٣) إذا كان المستقيم ك س + ٤ ص = ٦ عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٦) ، (١ ، ٢)
أوجد قيمة ك

(٤) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً سالباً طوله ٤ وحدات ويوازى المستقيم
٤ س + ٢ ص – ٥ = ٠

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً طوله ٣ وحدات و يكون عمودياً
على المستقيم : ٢ س = ٣ ص – ٥

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٢ ، ٥)
ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

(٧) إذا كانت معادلة مستقيم هى : (ك – ٢) س + (١ – ك) ص + ١ = ٠ وكان هذا المستقيـــم
يوازى محور السينات فأوجد قيمة ك

(٨) إذا كان المستقيم : (ك + ١) س – (٢ ك – ٣) ص = ٨ عمودى على المستقيم ٢ ص + ٣ س = ٥
أوجد قيمة ك

(٩) إذا كانت ﺃ (– ٣ ، ٤) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (– ٣ ، – ٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ﺃ و ينصف $\overline{\text{ب حـ}}$

(١٠) أوجد ميل الخط المستقيم و طول الجزء المقطوع من محور الصادات في ما يلى :

[١] ٤ س – ٣ ص = ٦ [٢] $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = ١$

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٤) و يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ٤٥°

(١٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ١) و يوازى محور السينات

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) و يوازى محور الصادات

(١٤) أوجد معادلة المستقيم العمودى على $\overline{\text{ب حـ}}$ من نقطة منتصفها حيث ب (٣ ، – ٢) ،جـ (– ٥ ، ١)

(١٥) الجدول المقابل يمثل علاقة خطية أوجد :
[١] معادلة الخط المستقيم
[٢] طول الجزء المقطوع من محور الصادات
[٣] قيمة كل من : ك ، ع

س	١	٣	ك	٤
د (س)	١	– ١	٢	ع



الاختبار الأول

السؤال الأول : أكمل ما يأتي

❶ إذا كانت : أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي ....

❷ المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (– ٢ ، ٣) معادلته هي ....

❸ إذا كان : س ، ص قياسي زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢

فإن : جا س + جا ص = ...

❹ البعد بين النقطتين (٦ ، ٠) ، (– ٤ ، ٠) يساوي ....

❺ إذا كانت النقطة (٠ ، أ) تنتمي للمستقيم : ٣ س – ٤ ص + ١٢ = ٠ فإن : أ = ...

❻ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ءحـ}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{ءحـ}$ = ...

السؤال الثاني : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ إذا كانت : جتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ حيث ٢ س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) =

① ١٥° ② ٣٠° ③ ٤٥° ④ ٦٠°

❷ ميل المستقيم الذي معادلته : ٢ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يساوي

① – $\frac{٣}{٢}$ ② – $\frac{٢}{٣}$ ③ $\frac{٢}{٣}$ ④ $\frac{٣}{٢}$

❸ طول القطعة المستقيمة بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٥ ، ١٢) يساوي .... وحدة طول

① ٥ ② ٧ ③ ١٢ ④ ١٣

❹ ظا ٤٥° ظا ٣٠° ظا ٦٠° = ...

① $\sqrt{٣}$ ② $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ③ ١ ④ $\frac{١}{٣}$

❺ في المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا حـ = ...

① ٢ جا أ ② ٢ جا حـ ③ ٢ جا ب ④ ٢ جتا أ

❻ ظا ٤٥° جا ٣٠° = ...

① $\frac{١}{٢}$ ② ١ ③ $\frac{٢}{٣}$ ④ $\frac{١}{٤}$

السؤال الثالث :

❶ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان : ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ حـ

فأوجد النسب المثلثية للزاوية حـ

❷ **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٧) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، – ٢)

السؤال الرابع :

❶ **أثبت أن** : جتا ٦٠° = جتا² ٣٠° – جا² ٣٠°

❷ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث : أ (٣ ، – ١) ، ب (٦ ، ٢)

، حـ (١ ، ٧) **أوجد** : ① إحداثيي كل من هـ ، ء ② طول $\overline{هـ ء}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدي

السؤال الخامس :

❶ **أثبت أن** : ظا ٦٠° = ٢ ظا ٣٠° ÷ (١ − ظا ٢ ٣٠°)

❷ **أوجد** الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الاختبار الثانى

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° = ...

① جا ٦٠° ② جتا ٦٠° ③ ظا ٦٠° ④ ٢ جا ٦٠°

❷ النقط (− ٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠) هى رؤوس مثلث........

① مختلف الأضلاع ② منفرج الزاوية ③ متساوى الأضلاع ④ قائم و متساوى الساقين

❸ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، − ٣) ويوازى محور السينات هى ....

① س = − ٢ ② ص = − ٣ ③ س = ٢ ④ ص = ٣

❹ إذا كان المستقيم : س + ٣ ص − ٦ = ٠ ، عمودياً على المستقيم : ٢ س − ٣ ص + ٧ = ٠

فان : ٢ = ...

① ٢ ② ٩ ③ ٤ ④ ١

❺ النقطة (٠ ، ٤) تنصف البعد بين النقطتين (− ١ ، − ١) ، (س ، ص)

فان النقطة (س ، ص) هى ....

① (١ ، ٩) ② (− ١ ، ٩) ③ (− $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) ④ (− ١ ، ٣)

❻ △ ٢ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ٢ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم فيكون جا ٢ جتا حـ = ...

① ١ ② $\frac{٩}{٢٥}$ ③ $\frac{١٦}{٢٥}$ ④ $\frac{١٢}{٢٥}$

السؤال الثانى :

❶ إذا كان المستقيمان : ٢ س + ب ص + ٣ = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ = ٠ متعامدين

فان : ب = ...

❷ إذا كان : جا س = ٠,٥ حيث س زاوية حادة فان : ق (∠ س) = ...

❸ البعد بين النقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، − ١٢) يساوى ....

❹ جا ٦٠° + جتا ٣٠° − ظا ٦٠° =

❺ إذا كان المستقيمان : ك س − ٢ ص + ٣ = ٠ ، ٦ س + ٣ ص − ٥ = متوازيين

فان : ك = ...

❻ ميل الخط المستقيم العمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٦) ، (− ٤ ، ١) يساوى..........

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

السؤال الثالث :

❶ **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٦) ومنتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (١ ، – ٢) ، ب (٣ ، ٤)

❷ **برهن على صحة أن** : جا٢ ٣٠° = ٩ جتا٢ ٦٠° – ظا٢ ٤٥°

السؤال الرابع :

❶ **أثبت أن** : △ أ ب حـ الذى رءوسه أ (١ ، ٤) ، ب (– ١ ، – ٢) ، حـ (٢ ، – ٣) قائم الزاوية فى ب ثم **أوجد** مساحة سطحه .

❷ فى الشكل المقابل : $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{بحـ}$ ، أب = ١٣ سم ، أحـ = ١٥ سم ، ء حـ = ٩ سم

أوجد فى أبسط صورة قيمة : $\frac{ظا(\angle حـ أ ء) + ظا(\angle ب أ ء)}{ظا(\angle حـ أ ء) - ظا(\angle ب أ ء)}$

أ ، ب ، ء ، حـ ، ١٣ سم ، ١٥ سم ، ٩ سم

السؤال الخامس :

❶ **أوجد** معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) وعمودى على المستقيم: ٥ س – ٢ ص + ٧ = ٠

❷ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بحـ}$ ، ق(∠ ب) = ٩٠° ، أب = ٣ سم ، أء = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، **أثبت أن** : جتا حـ – ظا (∠ أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$

الاختبار الثالث

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

❶ معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ١ ويمر بنقطة الأصل هى

(١) س = ١ (٢) ص = ١ (٣) ص = س (٤) ص = – س

❷ إذا كان : $\overleftrightarrow{ل م}$ ⊥ $\overleftrightarrow{هـ و}$ ، هـ (– ١ ، ٢) ، و (٠ ، ٠) فان : ميل $\overleftrightarrow{ل م}$ = ...

(١) – ٢ (٢) – $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) ٢

❸ إذا كان : ظا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث ٣ س زاوية حادة فان : ق (∠ س) = ...

(١) ١٠° (٢) ٢٠° (٣) ٣٠° (٤) ٦٠°

❹ دائرة مركزها نقطة الأصل قطرها ٦ وحدات فان النقطة التى تنتمى للدائرة هى ....

(١) (٦ ، ٠) (٢) (٠ ، – ٦) (٣) ($\sqrt{٨}$ ، ١) (٤) (١ ، $\sqrt{٥}$)

❺ فى △ أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ يكون جا ب + جتا ب ١

(١) = (٢) < (٣) > (٤) ≥

❻ إذا كان : جا س = $\frac{١}{٢}$ ، س زاوية حادة فان : جا ٢ س = ...

(١) ١ (٢) $\frac{١}{٤}$ (٣) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٤) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى



السؤال الثانى :

❶ $جتا^2 45° + ظا^2 60° - جا 30° =$

❷ إذا كانت : أ (٢ ، – ١) ، ب (٥ ، ٣) فان : أ ب = ... وحدة طول

❸ إذا كان : $ل_1$: ك س – ٢ ص + ٤ = ٠ ، $ل_2$: س + ٣ ص – ٧ = ٠

وكان : $ل_1 \perp ل_2$ فان : ك = ...

❹ جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = ...

❺ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (– ٢ ، ٧) ويوازى محور الصادات هى ....

❻ أ ب حـ مثلث قائم فى أ فيه ظا ب = ١ فيكون ظا حـ جا حـ جتا حـ = ...

السؤال الثالث :

❶ **أثبت أن :** المثلث الذى رؤوسه النقط : س (٠ ، ٦,٨) ، ص (٢ ، ٤) ،ع (– ٥ ، – ١)
قائم الزاوية فى ص

❷ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم
، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ وتلاقاها فى ء **أثبت أن :**
① جا ب + جتا حـ = ١,٤　　② $جا^2 حـ + جتا^2 حـ = 1$

السؤال الرابع :

❶ **أوجد** بدون الحاسبة قيمة : $\dfrac{جتا^2 60° + جتا^2 30° + ظا^2 45°}{جا 60° ظا 60° - جا 30°}$

❷ **مثل** بيانياً فى مستوى إحداثى متعامد النقط : أ (٢ ، ٣) ، ب (– ١ ، – ١)
، حـ (٣ ، – ٤) ، ء (٦ ، ٠) ثم **أثبت** أنها رؤوس مربع **وأوجد** مساحة سطحه .

السؤال الخامس :

❶ **أوجد قيمة** س إذا كان : جا س جا ٤٥° ظا ٦٠° = $ظا^2 45° - جتا^2 60°$

❷ مستقيم ميله $\frac{1}{2}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله وحدتان **أوجد** :
① معادلة المستقيم　　② نقطة تقاطعه مع محور السينات .



الاختبار الأول

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ المدى لمجموعة القيم : ٥ ، ١٠ ، ٣ ، ٨ ، ٤ هي : ....

(١) ٥ (٢) ٣ (٣) ٦ (٤) ٧

❷ الرابع المتناسب للكميات : ٣٢ ، ٨ ، ٢ ، ....

(١) ١ (٢) ٢ (٣) $\frac{١}{٢}$ (٤) $\frac{١}{٤}$

❸ إذا كانت : ص ∝ س وكانت س = ٤ عندما ص = $١\frac{١}{٢}$ ، فان ثابت التغير يساوى........

(١) ٦ (٢) $\frac{٥}{٢}$ (٣) $\frac{٨}{٣}$ (٤) $\frac{٣}{٨}$

❹ إذا كان : ع دالة من س إلى ص حيث ، س = {١ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٣ ، ٥} ، وكانت ع = {(١ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (أ ، ٣)} فان : أ = ...

(١) ١ (٢) ٥ (٣) ٧ (٤) ٣

❺ إذا كانت : د(س) = ٣ س + ك ، وكان د(٢) = ١٠ فان ك = ...

(١) ٤ (٢) ٣ (٣) ٢ (٤) ١

❻ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٦}{٥}$ ، فان : $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ = ...

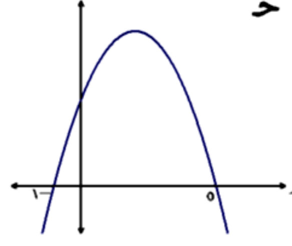
(١) ٣٠ (٢) ١١ (٣) ١ (٤) $\frac{٦}{٥}$

السؤال الثانى :

❶ إذا كان : ب وسط متناسب بين أ ، حـ أثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + حـ^٢} = \frac{أ}{حـ}$

❷ فى الشكل المقابل :

يمثل منحنى الدالة ص = د(س) أوجد قيمة $\frac{د(٨)}{د(-٤)}$



السؤال الثالث :

❶ مثل بيانياً منحنى الدالة د(س) = (س − ٣)^٢ حيث س ∈ [٠ ، ٦] ومن الرسم

(١) استنتج القيمة العظمى أو الصغرى للدالة . (٢) معادلة محور التماثل

❷ إذا كانت : ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٣ عندما س = ٨ أوجد :

(١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة س عندما ص = ٦



السؤال الرابع :

❶ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة على س حيث م ع ب تعنى أن : م + ب = ٥ أكتب بيان ع وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟

❷ إذا كان : (س − ٣ ، ٢س + ص) = (١ ، ٥) أوجد قيمة كل من : س ، ص

السؤال الخامس :

الجدول التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن أوجد الانحراف المعيارى لعد الأطفال .

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الأسر	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

احسب الانحراف المعيارى

الاختبار الثانى

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : س = { ٣ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٣ } فان : س × ص =.......

(٢) إذا كان : (م + ب ، ٢٧) = (٧ ، ب^٣) فان م − ب = ...

(٣) إذا كان : $\frac{م}{ب} = \frac{٢}{٥}$ فان قيمة النسبة : $\frac{٢م + ب}{٣م - ب}$ =.......

(٤) من المصادر الثانوية لجمع البيانات ....

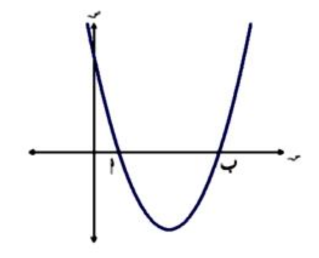
(٥)

(٦) الدالة د : د(س) = ٥ تقطع محور الصادات فى النقطة ....

السؤال الثانى :

❶ إذا كان : ب وسط متناسب بين م ، حـ أثبت أن : $\frac{م + ب}{ب + حـ} = \frac{م}{ب}$

❷ فى الشكل المقابل



يمثل منحنى الدالة د(س) = س^٢ − ٦س + ك

، وكان م ب = ٤ وحدات أوجد قيمة ك



السؤال الثالث :

❶ مثل بيانياً منحنى الدالة د(س) = ٤ − س^٢ حيث س ∈ [−٣ ، ٣] ومن الرسم

استنتج (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة .



❷ إذا كان : ص × س = { (٣ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٥) }

أوجد : (س ∩ ص) × س

السؤال الرابع :

❶ إذا كان : أ ∝ ب ، أثبت أن : (أ² + ب²) ∝ أ ب

❷ إذا كانت : س = { $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت ع علاقة على س حيث أ ع ب تعني أن ب هي المعكوس الضربي للعدد أ . أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟

السؤال الخامس :

❶ إذا كانت : ص ∝ $\sqrt[3]{س}$ وكانت ص = ١٥ عندما س = ٢٧

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٠٠٠

❷ التوزيع التكرارى التالى يوضح عدد الأهداف التى سجلت فى عدد المباريات لكرة القدم .

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الأسر	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

احسب الانحراف المعيارى

الاختبار الأول

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨ } فان س = ...

(١) ٨　(٢) ٦　(٣) ٥　(٤) ٣

❷ إذا كانت النقطة (أ ، ٥) تقع على محور الصادات فان ٧ أ + ٢ =........

(١) ٠　(٢) ٢　(٣) ٥　(٤) ٧

❸ الرابع المتناسب للكميات ٩ ، ١٢ ، ٣ هو ....

(١) ٦　(٢) ٤　(٣) ٢　(٤) ١

❹ أى العلاقات الآتية تمثل تغير عكسياً بين المتغيرات س ، ص ؟

(١) ص = ٢ س　(٢) ص = ٢س + ٥　(٣) س ص = ٥　(٤) $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

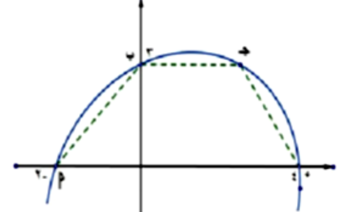
❺ إذا كانت دالة حيث د(س) = ٣ س − ١٢ يمثلها بيانياً مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

(١) (٣ ، ٠)　(٢) (٣ ، ٤)　(٣) (٤ ، ٠)　(٤) (٤ ، ٣)



السؤال الثاني :

❶ إذا كانت : ٢ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{٥ ٢ + ٣ حـ}{٥ ب + ٣ ء} = \frac{٧ ٢ - ٥ حـ}{٧ ب - ٥ ء}$



❷ في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

ص = د (س) أوجد مساحة الشكل ٢ ب حـ ء

السؤال الثالث :

❶ إذا كان : د (س) = ٢ س + ب تمثل بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة (٥ ، ٢ – ٢)

أوجد ① قيمة ٢ ، ب ② نقطة تقاطع الدالة بمحور الصادات

③ مساحة المثلث المكون من محوري الإحداثيات والمستقيم الممثل بالدالة .

❷ إذا كانت : س = ع + ٨ ، ع تتناسب عكسياً مع ص ، وكانت ع = ٢ عندما ص = ٣ .

أوجد قيمة ص عندما س = ٣

السؤال الرابع :

❶ إذا كان : $\frac{٢}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{٢ ٢ + ب}{٣ ك}$ أوجد قيمة ك .

❷ إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } ، ص = { ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث ٢ ع ب تعني أن : ب = ٢ ٢ + ١ لكل ٢ ∈ س

، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي هل ع دالة ؟ ولماذا ؟ وان كانت دالة أذكر مداها ؟

السؤال الخامس :

❶ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

❷ أوجد الانحراف المعيارى للقيم الآتية : ١٢ ، ١٣ ١٦ ، ١٨ ، ٢١



الاختبار الرابع

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ إذا كان منحنى الدالة د(س) = س٢ − م يمر بالنقطة (١ ، ٠) فان قيمة م =........

① ١ ② −١ ③ صفر ④ ±١

❷ إذا كانت النقطة (٥ ، ب − ٢) تقع على محور السينات فان : ب = ...

① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

❸ إذا كان : ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٥ فان : ن(ص) =........

① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

❹ الثالث المتناسب للأعداد ١٨ ، ٦ هو........

① ٢ ② ٣ ③ ٤ ④ ٥

❺ إذا كانت : $\frac{م}{ب} = \frac{٥}{٤}$ فان : $\frac{م + ب}{م − ب}$ = ...

① ١ ② ٤ ③ ٥ ④ ٩

❻ إذا كانت الدالة د : د(س) = ٢ − ٣ س يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

① (٠ ، ٢) ② (١ ، ٢) ③ (٢ ، ١) ④ (٢ ، ٠)

السؤال الثاني :

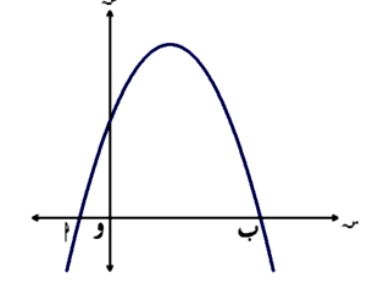
❶ إذا كانت : $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٨}$ أثبت أن : $\frac{س + ص + ع}{س − ع} = ٥$

❷ في الشكل المقابل :

يمثل منحنى الدالة : د(س) = −س٢ + ٤ س + ك − ١

وكان و ب = ٥ و م

أوجد قيمة ك .



السؤال الثالث :

❶ ارسم الشكل البياني للدالة د : د(س) = ٢س − س٢ حيث س ∈ [−١ ، ٣] ومن الرسم

أوجد : ① معادلة محور التماثل ② القيمة العظمى أو الصغرى للدالة ③ نقطة رأس المنحنى

❷ إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٧ أوجد قيمة س عندما ص = ٦٠

السؤال الرابع :

❶ إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن : أ + ب = عدداً فردياً لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي هل ع دالة ؟ ولماذا ؟ وان كانت دالة اذكر مداها ؟

❷ إذا كان : أ ، ب ، حـ ثلاث متغيرات حقيقية . وكان أ ∝ حـ ، ب ∝ حـ أثبت أن : أ ب ∝ حـ^2

السؤال الخامس :

❶ إذا كانت : ب وسط متناسب بين أ ، جـ أثبت أن : $\frac{حـ^2 - ٣ب^2}{ب^2 - ٣أ^2} = \frac{حـ}{أ}$

❷ الجدول التكرارى التالى يبين عدد الأطفال لبعض الأسر فى احدى المدن أوجد الانحراف المعيارى لعدد الأطفال

ب) الجدول التكراري التالي يبيبن عدد اطفال بعض الاسر في احدي المدن اوجد الا نحراف المعياري لعدد الاطفال :

عدد الاطفال	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الاسر	٥	٧	٧	٥	٦	٣٠

الاختبار الخامس

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

❶ المدى لمجموعة القيم : ٥ ، ٢ ، ٨ ، ١٢ ، ٩ هو ....

(١) ٢   (٢) ٥   (٣) ١٠   (٤) ١٥

❷ إذا كان : س = { ٥ } ، ن(ص) = ٣ فان : ن(س × ص) =........

(١) ١   (٢) ٣   (٣) ٨   (٤) ١٥

❸ إذا كان : $\frac{أ}{١٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{أ - ٢ب}{ك}$ فان ك = ...

(١) ١   (٢) ٢   (٣) ٣   (٤) ٤

❹ إذا كانت الدالة د : د(س) = ٥س + ٤ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ك) فان ك =........

(١) ٥   (٢) ٤   (٣) ١٠   (٤) ١٤

❺ إذا كان : أ ، ٥ ، ب ، ٧ أربع كميات متناسبة فان : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(١) $\frac{٥}{٧}$ (٢) $\frac{٧}{٥}$ (٣) ٥   (٤) ٧

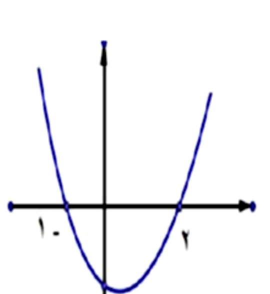


❻ إذا كان : د(س) = ٢ س − ٥ وكانت : د(٣) = ٧ أوجد قيمة : ٢ = ...

(١) ٥ (٢) ٤ (٣) ٣ (٤) ٧

السؤال الثانى :

❶ إذا كان : ٢ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{٢^٢ - حـ^٢}{ب^٢ - ء^٢} = \frac{٢ حـ}{ب ء}$



❷ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د(س) = س٢ + ٢ س + ب أوجد قيمة ٢ + ب

السؤال الثالث :

❶ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د(س) = س٢ + ٢س + ١ حيث س ∈ [−٤ ، ٢] ومن الرسم

أوجد : (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

(٣) نقطة رأس المنحنى

❷ إذا كانت : ص تتغير عكسياً بتغير س٢ وكانت ص = ١ ، عندما س = ١٠

أوجد العلاقة بين س ، ص أوجد قيمة ص عندما س = ٤

السؤال الرابع :

❶ إذا كان : $\frac{٢س - ص}{س + ٢ص} = \frac{٤}{٧}$ أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$ ثم أوجد القيمة العددية للعدد $\frac{٣س + ٢ص}{٤س + ص}$.

❷ إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من

س إلى ص حيث ٢ ع ب تعنى أن : ٢٢ = ب لكل ٢ ∈ س ، ب ∈ ص

أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى هل ع دالة ؟ ولماذا ؟ وان كانت دالة اذكر مداها ؟

السؤال الخامس :

❶ إذا كانت : $\frac{س}{٢ - ٢ب} = \frac{ص}{ب - ٢حـ} = \frac{ع}{حـ - ٢ ٢}$ أثبت أن : $\frac{س + ٢ص - ع}{٣ ٢ - ٥حـ} = \frac{ص + ٢ع}{ب - ٤ ٢}$

أوجد الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى

المجموعات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
التكرار	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠